Современные проблемы
МАТЕМАТИКИ

Б. М. Левитан

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1950

Б. М. ЛЕВИТАН

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *Чудов Л. А.* Техн. редактор *Мурашова Н. Я.*

Подписано к печати 9/II 1950 г. 10 печ. л. 7,98 уч.-изд. л.
32 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 3000 экз. Т-00227. Заказ № 5602.
Цена 4 руб. 80 коп. переплет 50 коп.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, в классической математической физике большую роль играет разложение произвольных функций в ряды Фурье по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. За исключением нескольких важных случаев (функции Бесселя, ортогональные полиномы Лежандра, Чебышева-Эрмита, Лагерра и т. д.) в классической математической физике обычно предполагаются конечность интервала и ограниченность коэффициентов уравнения.

Обобщение теории на случай бесконечного интервала или особенностей в коэффициентах встречало значительные трудности и стало возможным лишь после создания спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Это обобщение с достаточной полнотой было дано Г. Вейлем *). После этого долгое время почти не появлялось новых работ по рассматриваемому вопросу. Объяснение этому следует, повидимому, искать в отсутствии в то время интересных приложений.

Новый толчок был дан работами физиков по квантовой механике. Было показано, что определение уровней энергии атома во многих случаях сводится к задаче о собственных значениях дифференциального уравнения второго порядка.

Дальнейший прогресс происходил главным образом благодаря усилиям физиков. Следует, однако, отметить, что доказательства, которые излагаются в руководствах по физике,

---

*) H. Weyl:

1) Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttinger Nachrichten (1909), стр. 37—64.

2) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 68 (1910), стр. 220—269.

3) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttinger Nachrichten (1910), стр. 442—467.

не всегда удовлетворяют современным требованиям математической строгости.

В 1946 г. вышла книга Титчмарша *), где дано новое изложение основных вопросов, включая также ряд вопросов, возникших благодаря развитию квантовой физики. Метод Титчмарша доказательства основной теоремы разложения в обобщенный интеграл Фурье близок к методу, которым А. И. Плеснер **) доказывает общую спектральную теорему.

В настоящей книге я предлагаю новый метод доказательства теоремы разложения в обобщенный интеграл Фурье. Мне кажется, что этот метод проще известных и вполне элементарен. Он позволяет также без особого труда исследовать спектры различных дифференциальных операторов, что мне представляется наиболее интересным во всей теории.

Для удобства читателей я изложил в первой главе необходимые сведения о задаче Штурма-Лиувилля на конечном промежутке. Кроме того, имеются два дополнения, в которых изложены важные теоремы математического анализа, необходимые в основном тексте. Таким образом, для чтения книги не требуется знакомства со специальными вопросами математического анализа. Исключение составляет лишь глава, посвященная примерам, где пришлось сослаться на небольшое число фактов из аналитической теории дифференциальных уравнений. Читатель, не знакомый с этими фактами, может принять их на веру, либо вовсе пропустить соответствующие примеры. Для понимания дальнейшего текста это не существенно.

Л. А. Чудову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд существенных замечаний, выражаю свою глубокую благодарность.

Октябрь 1949 г. *Б. М. Левитан*

---

*) E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions expansions associated with second-order differential equations, Oxford (1946).

В этой книге имеется подробная библиография по 1946 г. Из новых работ следует указать ряд статей, опубликованных в American Journal of Mathematics за 1947—1949 гг. и посвященных в основном изучению спектров при различных частных предположениях.

**) А. И. Плеснер, Спектральная теория линейных операторов, I. Успехи математических наук, т. IX (1941), стр. 84.

ГЛАВА I

РАЗЛОЖЕНИЕ В КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

§ 1. Асимптотика для собственных значений и собственных функций

1. Пусть (a, b) — конечный замкнутый интервал и $q(x)$ — непрерывная и действительная в этом интервале функция. Обозначим через α и β произвольные действительные числа и рассмотрим граничную задачу (λ — параметр)

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{1.1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $a = 0$ и $b = \pi$. В самом деле, подстановка $x' = \dfrac{x-a}{b-a}\pi$ преобразует интервал (a, b) в интервал $(0, \pi)$, не меняя при этом вида граничной задачи (1.1.1) — (1.1.2).

Предположим, что при некотором λ_1 рассматриваемая граничная задача имеет нетривиальное решение $y(x, \lambda_1)$, $[y(x, \lambda_1) \not\equiv 0]$. В этом случае число λ_1 называется собственным значением, а соответствующая функция $y(x, \lambda_1)$ называется собственной функцией.

Лемма 1.1.1. *Собственные функции $y(x, \lambda_1)$ и $y(x, \lambda_2)$, соответствующие различным собственнным значениям, ортогональны, т. е.*

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1)\, y(x, \lambda_2)\, dx = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные, дважды дифференцируемые функции. Положим

$$Lf = f''(x) - q(x) f(x).$$

Дважды интегрируя по частям, получим тождество

$$\int_0^\pi Lf \cdot g(x)\,dx =$$

$$= W_\pi\{f, g\} - W_0\{f, g\} + \int_0^\pi f(x) \cdot Lg\,dx, \qquad (1.1.3)$$

где

$$W_x\{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Пусть $f(x) = y(x, \lambda_1)$ и $g(x) = y(x, \lambda_2)$. Из граничных условий (1.1.2) легко следует, что

$$W_\pi\{f, g\} = W_0\{f, g\} = 0.$$

Поэтому из тождества (1.1.3) следует

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1)\, y(x, \lambda_2)\,dx = 0,$$

и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то лемма доказана.

Лемма 1.1.2. *Собственные значения граничной задачи* (1.1.1) — (1.1.2) *действительны.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 = u + iv$ — комплексное собственное значение. В силу действительности функции $q(x)$, а также действительности чисел α и β, $\overline{\lambda}_1 = u - iv$ есть также собственное значение с собственной функцией $\overline{y}(x, \lambda)$.

На основании предыдущей леммы мы имеем

$$\int_0^\pi |y(x, \lambda_1)|^2\,dx = 0,$$

откуда следует $y(x, \lambda_1) \equiv 0$.

2. Положим $\operatorname{ctg}\alpha = -h$ и $\operatorname{ctg}\beta = H$. Тогда граничные условия (1.1.2) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} y'(0) - hy(0) = 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2')$$

В таком виде граничные условия появляются, например, в задачах теплопроводности. Мы вначале будем предполагать, что $h \neq \infty$ и $H \neq \infty$ (т. е. $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$). Изменения, которые следует внести в других случаях, будут затем указаны отдельно.

Обозначим через $\omega(x, \lambda)$ решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\omega(0, \lambda) = 1; \quad \omega'(0, \lambda) = h.$$

Положим $\lambda = s^2$ и перепишем уравнение (1.1.1) в виде

$$y'' + s^2 y = q(x)\,y.$$

Считая правую часть известной и применяя метод вариации произвольных постоянных, мы получим

$$\omega(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)\,q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt. \qquad (1.1.4)$$

Лемма 1.1.3. *При* $\lambda \geqslant 0$

$$|\omega(x, \lambda)| \leqslant M,$$

где M — *постоянная* (*не зависящая от* x *и* λ) *величина.*

Доказательство. Пусть $M_\lambda = \max\limits_x |\omega(x, \lambda)|$. M_λ существует в силу теоремы о существовании решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Из (1.1.4) следует

$$M_\lambda \leqslant 1 + \frac{|h|}{s} + \frac{M_\lambda}{s}\int_0^\pi |q(t)|\,dt.$$

Отсюда

$$M_\lambda\left(1-\frac{1}{s}\int_0^\pi |q(t)|\,dt\right) \leqslant 1+\frac{|h|}{s}.$$

Поэтому, если

$$1-\frac{1}{s}\int_0^\pi |q(t)|\,dt > 0, \quad \text{т. е.} \quad s > \int_0^\pi |q(t)|\,dt,$$

то

$$M_\lambda \leqslant \frac{1+\frac{|h|}{s}}{1-\frac{1}{s}\int_0^\pi |q(t)|\,dt}.$$

Из этой оценки следует, что при $s > 2\int_0^\pi |q(t)|\,dt$

$$M_\lambda < 2+|h|\left(\int_0^\pi |q(t)|\,dt\right)^{-1}.$$

При $s \leqslant 2\int_0^\pi |q(t)|\,dt$ $\omega(x, \lambda)$ ограничена в силу той же теоремы существования, на которую мы ссылались в начале доказательства.

3. Займемся теперь выводом асимптотических формул для собственных значений и собственных функций. Из этих формул, в частности, будет следовать существование бесчисленного множества собственных значений.

При любом λ функция $\omega(x, \lambda)$ удовлетворяет, очевидно, первому из граничных условий (1.1.2). Поэтому мы определим собственные значения, если подставим функцию $\omega(x, \lambda)$ во второе граничное условие.

Дифференцируя формулу (1.1.4) по x, мы получим

$$\omega'_x(x, \lambda) = -s\sin sx + h\cos sx + \int_0^x \cos s(x-t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt. \qquad (1.1.4')$$

Подставляя (1.1.4) и (1.1.4′) во второе граничное условие (1.1.2′), мы получим

$$
\begin{aligned}
&-s\sin s\pi + h\cos s\pi + \int_0^\pi \cos s(\pi - t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt + \\
&+ H\left[\cos s\pi + \frac{h}{s}\sin s\pi + \frac{1}{s}\int_0^\pi \sin s(\pi - t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt\right] = \\
&= \sin s\pi\left[-s + \int_0^\pi \sin st\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt + \frac{Hh}{s} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{H}{s}\int_0^\pi \cos st\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt\right] + \\
&\qquad + \cos s\pi\left[h + \int_0^\pi \cos st\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt + H - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{H}{s}\int_0^\pi \sin st\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt\right] = \\
&\qquad = \sin s\pi\,[-s + B] + A\cos s\pi = 0, \qquad (1.1.5)
\end{aligned}
$$

где

$$
A = h + H + \int_0^\pi \left\{\cos st - \frac{H}{s}\sin st\right\}\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt,
$$

$$
B = \frac{Hh}{s} + \int_0^\pi \left\{\sin st + \frac{H}{s}\right\}\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt.
$$

Так как $\omega(t, \lambda)$ — ограниченная функция, то уравнение (1.1.5) можно записать в виде

$$
-s\sin s\pi + k\cos s\pi + O(1) = 0, \qquad (1.1.5')
$$

где $k = h + H$ есть постоянная величина. Для больших s уравнение (1.1.5′), очевидно, имеет решения, и корни лежат вблизи от целых чисел. Отсюда уже следует существование бесчисленного множества собственных значений. Покажем, что, начиная с некоторого достаточно большого целого n, вблизи каждого n лежит только один корень уравнения (1.1.5′).

Дифференцируя левую часть уравнения (1.1.5′) по s, мы получим

$$-\sin s\pi - s\pi \cos s\pi - k\pi \sin s\pi + O(1).$$

Это выражение при s, близких к целым числам, не может равняться нулю.

Положим $s_n = n + \delta_n$. Уравнение (1.1.5′) перепишется в виде

$$-(n+\delta_n)\sin \pi\delta_n + k\cos \pi\delta_n + O(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $\sin \pi\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е. $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Таким образом, для больших n корни уравнения (1.1.5′) имеют вид

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.1.6}$$

4. Предположим, что $q(x)$ имеет ограниченную производную. В этом случае формулу (1.1.6) можно значительно уточнить.

Из формулы (1.1.4) следует, что $\omega(t, \lambda) = \cos st + O\left(\frac{1}{s}\right)$.

Подставляя это выражение для $\omega(t, \lambda)$ в формулы для A и B, мы получим

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos 2st\,dt + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\sin 2st\,dt + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Интегрируя по частям, мы получим

$$\int_0^\pi q(t)\cos 2st\,dt = O\left(\frac{1}{s}\right), \qquad \int_0^\pi q(t)\sin 2st\,dt = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Следовательно,

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad h_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt,$$

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Поэтому уравнение (1.1.5) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}. \tag{1.1.7}$$

Следовательно, полагая снова $s_n = n + \delta_n$, мы получим

$$\operatorname{tg} \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и, значит,

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.1.8}$$

где c — постоянная величина.

Пользуясь формулой (1.1.8), получим асимптотическую формулу для собственных функций $\omega(x, \lambda_n) = u_n(x)$. Подставляя в формулу (1.1.4) вместо $\omega(t, \lambda)$ $\cos st + O\left(\frac{1}{s}\right)$, мы получим, пользуясь дифференцируемостью функции $q(t)$:

$$\omega(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx +$$
$$+ \frac{1}{s}\int\limits_0^x \sin s(x-t)\cos st\, q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right) =$$
$$= \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{\sin sx}{2s}\int\limits_0^x q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Подставляя сюда s вместо s_n, мы получим

$$\omega(x, \lambda_n) = u_n(x) = \cos nx - \frac{cx}{n}\sin nx + \\ + \frac{h}{n}\sin nx + \frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt.$$

Для нормировки собственных функций $u_n(x)$ рассмотрим интеграл

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi u_n^2(x)\,dx = \\ = \int_0^\pi \cos^2 nx\,dx + \frac{2}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin nx\,dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В силу дифференцируемости функции $\beta(x)$

$$\int_0^\pi \beta(x)\sin nx\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, для нормированных собственных функций имеет место следующая асимптотическая формула:

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1.1.9)$$

5. Разберем теперь случай $h=\infty$, $H\neq\infty$. Первое граничное условие (1.1.2) принимает вид

$$y(0)=0.$$

Обозначим через $\omega(x, \lambda)$ решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\omega(0, \lambda)=0, \quad \omega'(0, \lambda)=1.$$

Для $\omega(x, \lambda)$ имеет место интегральное уравнение

$$\omega(x, \lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt. \tag{1.1.10}$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$\omega'_x(x, \lambda)=\cos sx+\int_0^x \cos s(x-t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt.$$

Поэтому из второго граничного условия (1.1.2′) следует

$$\cos s\pi+\int_0^\pi \cos s(\pi-t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt+$$
$$+H\left[\frac{\sin s\pi}{s}+\frac{1}{s}\int_0^\pi \sin s(\pi-t)\,\omega(t, \lambda)\,q(t)\,dt\right]=0. \tag{1.1.11}$$

Так как $\omega(t, \lambda)=O\left(\frac{1}{s}\right)$, то из уравнения (1.1.10) следует

$$\omega(x, \lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right). \tag{1.1.10′}$$

Поэтому (1.1.11) принимает вид

$$\cos s\pi+\frac{1}{s}\int_0^\pi \cos s(\pi-t)\sin st\,q(t)\,dt+$$
$$+H\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0. \tag{1.1.12}$$

Предполагая снова, что $q(t)$ имеет ограниченную производную, мы получим

$$\int_0^\pi q(t)\cos s(\pi-t)\sin st\,dt=$$

$$=\cos s\pi\int_0^\pi q(t)\cos st\sin st\,dt+\sin s\pi\int_0^\pi q(t)\sin^2 st\,dt=$$

$$=\frac{\sin s\pi}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt+O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Поэтому уравнение (1.1.12) принимает вид

$$\cos s\pi+\frac{\sin s\pi}{s}\left[H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right]+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=$$

$$=\cos s\pi+H_1\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0. \quad (1.1.12')$$

Из этого уравнения видно, что при больших s корни уравнения s_n должны быть близки к числам вида $n+\frac{1}{2}$, где n — целое число. Кроме того, так же как и прежде, доказывается, что, начиная с некоторого достаточно большого целого n, вблизи каждого числа $n+\frac{1}{2}$ лежит только один корень уравнения (1.1.12′).

Положим $s_n=n+\frac{1}{2}+\delta_n$. Тогда уравнение (1.1.12′) можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg}\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi=-\operatorname{tg}\pi\delta_n=-\frac{H_1}{n+\frac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому

$$\delta_n=\frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и

$$s_n=n+\frac{1}{2}+\frac{H_1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставляя это значение в формулу (1.1.10), мы получим

$$u_n(x) = \omega(x, \lambda_n) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для нормированной собственной функции отсюда следует формула

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Случай $h \neq \infty$, $H = \infty$ с помощью подстановки $t = \pi - x$ сводится к предыдущему.

6. Наконец, разберем случай $h = \infty$ и $H = \infty$. Это означает, что функция $\omega(x, \lambda)$ из предыдущего пункта удовлетворяет условию $\omega(\pi, \lambda) = 0$. Поэтому из (1.1.10) следует

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin s(\pi - t)\, q(t)\, \omega(t, \lambda)\, dt = 0$$

или

$$\sin s\pi \left[1 + \int_0^\pi \cos st\, \omega(t, \lambda)\, q(t)\, dt\right] - \\ - \cos s\pi \int_0^\pi \sin st\, \omega(t, \lambda)\, q(t)\, dt = 0.$$

Так как $\omega(t, \lambda) = \frac{\sin st}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$, то из последнего уравнения следует

$$\sin s\pi - \frac{1}{2s}\cos s\pi \int_0^\pi q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\ = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s}\cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0.$$

Отсюда так же, как и в пункте 4,

$$s_n = n + \frac{\alpha}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставляя это значение в формулу (1.1.10), мы получим

$$u_n(x) = \omega(x, \lambda_n) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

§ 2. Нули собственных функций

Глубокое исследование распределения нулей собственных функций привело Штурма к другому доказательству существования бесчисленного множества собственных значений граничной задачи (1.1.1) — (1.1.2).

Чтобы ориентироваться в результатах настоящего параграфа, рассмотрим простейшую граничную задачу

$$y'' + \lambda y = 0,$$

$$y'(0) = 0,$$

$$y'(\pi) = 0.$$

Здесь собственные функции суть $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \cos 2x, \ldots, u_n(x) = \cos nx, \ldots$ Соответствующие собственные значения суть $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1^2$, $\lambda_2 = 2^2, \ldots$ $\lambda_n = n^2, \ldots$ Мы расположили собственные функции в порядке возрастания собственных значений и начали счет с нуля. Непосредственно видно, что нули собственных функций обладают следующими двумя свойствами:

1) n-я собственная функция внутри интервала $(0, \pi)$ имеет ровно n нулей и

2) нули n-й и $(n+1)$-й собственных функций перемежаются, т. е. между любыми двумя последовательными нулями n-й собственной функции лежит нуль $(n+1)$-й собственной функции.

Оказывается, что эти свойства собственных функций имеют место и в общем случае.

Основной в этом круге вопросов является следующая фундаментальная теорема Штурма:

Теорема 1.2.1. *Пусть даны два уравнения:*

$$y'' + g(x) y = 0, \tag{1.2.1}$$

$$y'' + h(x) y = 0. \tag{1.2.2}$$

Если во всем интервале (a, b) $g(x) < h(x)$, то между каждыми двумя нулями любого решения первого уравнения заключен по крайней мере один нуль каждого решения второго уравнения.

Доказательство. Пусть y_1 есть решение первого уравнения, а y_2 — второго, т. е.

$$y_1'' + g(x) y_1 = 0,$$
$$y_2'' + h(x) y_2 = 0.$$

Умножая первое уравнение на y_2, а второе на y_1 и вычитая, мы получим

$$y_1'' y_2 - y_2'' y_1 = \frac{d}{dx}\{y_1' y_2 - y_2' y_1\} = \{h(x) - g(x)\} y_1 y_2. \quad (1.2.3)$$

Обозначим последовательные нули y_1 через x_1 и x_2. Интегрируя последнее тождество в пределах от x_1 до x_2, мы получим

$$\{y_1' y_2 - y_2' y_1\}_{x_1}^{x_2} = y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \{h(x) - g(x)\} y_1 y_2 \, dx. \quad (1.2.4)$$

Предположим, что y_2 в интервале (x_1, x_2) в нуль не обращается. Не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что внутри интервала (x_1, x_2) $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. Следовательно, в последнем равенстве правая часть положительна. Так как, по предположению, $y_1 \geqslant 0$, то в точке x_1 функция y_1 возрастает. Следовательно *), $y_1'(x_1) > 0$. По аналогичным соображениям $y_1'(x_2) < 0$. Поэтому

$$y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) \leqslant 0,$$

и мы пришли к противоречию.

Следствие. *Любое решение уравнения*

$$y'' + g(x) y = 0 \quad (1\ 2.5)$$
$$(-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant \infty)$$

*) $y'(x_1)$ не может равняться нулю, ибо по теореме единственности решения дифференциального уравнения в этом случае следовало бы $y_1 \equiv 0$, что мы исключили.

при $g(x) < -m^2 < 0$ *может иметь не более одного нуля.* В самом деле, уравнение

$$y'' - m^2 y = 0$$

имеет решение e^{mx}, которое нигде в нуль не обращается. Поэтому на основании предыдущей теоремы любое решение уравнения (1.2.5) не может иметь больше одного нуля в любом конечном интервале.

Теорема 1.2.2. (Теорема сравнения.) *Пусть* $u(x)$ *есть решение уравнения* (1.2.1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(a) = \sin\alpha, \quad u'(a) = -\cos\alpha, \tag{1.2.6}$$

и $v(x)$ — *решение уравнения* (1.2.2) *с теми же начальными условиями.*

Если $u(x)$ *в интервале* $a < x \leqslant b$ *имеет* m *нулей, то* $v(x)$ *в том же интервале имеет не меньше чем* m *нулей и* k*-й нуль* $v(x)$ *меньше* k*-го нуля* $u(x)$.

Доказательство. Обозначим через x_1 ближайший к точке a (но отличный от этой точки) нуль функции *) $u(x)$. На основании предыдущей теоремы достаточно доказать, что $v(x)$ имеет по крайней мере один нуль внутри интервала (a, x_1). Предположим противное. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что внутри интервала (a, x_1) $v(x) > 0$, $u(x) > 0$. Так как $u(x_1) = 0$, то в окрестности точки x_1 функция $u(x)$ убывает. Следовательно, $u'(x_1) < 0$. Интегрируя тождество (1.2.3) в пределах от a до x_1, мы получим

$$u'(x_1)\, v(x_1) = \int_a^{x_1} \{h(x) - g(x)\}\, u\, v\, dx.$$

---

*) Наименьший нуль существует, так как нетривиальное решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения имеет только изолированные нули. Действительно, допустим, что $x_0 \neq \infty$ есть предельная точка нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ некоторого решения $y(x)$ дифференциального уравнения. В силу непрерывности $y(x)$, $y(x_0) = 0$. Далее,

$$\frac{y(x_0) - y(x_n)}{x_0 - x_n} = 0.$$

Переходя к пределу $(n \to \infty)$, мы получим $y'(x_0) = 0$, т. е. $y(x) \equiv 0$.

Так как в интервале (a, x_1), по предположению, $v(x)$ в нуль не обращается, то в последней формуле правая часть положительна. Выражение же слева $\leqslant 0$, и мы получили противоречие.

Следующая теорема Штурма доказывает существование бесчисленного множества собственных значений.

Теорема 1.2.3. (Теорема осцилляции.) *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$ *граничной задачи* (1.1.1) — (1.1.2) *так, что собственная функция, соответствующая собственному значению* λ_m, *имеет ровно* m *нулей в интервале* $a < x < b$.

Доказательство. Пусть $\omega(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.2.6).

В силу предыдущей теоремы при возрастании λ число нулей функции $\omega(x, \lambda)$ не убывает. Пусть $|q(x)| < c$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Сравним уравнение (1.1.1) с уравнением

$$y'' + (\lambda + c)\,y = 0.$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (1.2.6), есть

$$y_1 = \sin\alpha \,\mathrm{ch}\,\{(-\lambda - c)^{1/2}(x - a)\} - \\ - \frac{\cos\alpha}{(-\lambda - c)^{1/2}}\,\mathrm{sh}\,\{(-\lambda - c)(x - a)\}.$$

При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значений λ эта функция, очевидно, в нуль не обратится. Поэтому, пользуясь снова предыдущей теоремой, мы убедимся, что $\omega(x, \lambda)$ при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значений λ в нуль не обращается.

Выбирая для сравнения уравнение

$$y'' + (\lambda - c)\,y = 0,$$

мы убедимся, что при λ положительном и неограниченно возрастающем число нулей решения $\omega(x, \lambda)$, расположенных в интервале (a, b), неограниченно растет.

Рассмотрим уравнение

$$\omega(x, \lambda) = 0,$$

На основании теоремы о неявных функциях корни этого уравнения непрерывно зависят от λ. Если x_0 $(a < x_0 < b)$ есть нуль решения $\omega(x, \lambda_0)$, то любому достаточно малому числу ε соответствует такое число δ, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ решение $\omega(x, \lambda)$ имеет в точности один нуль в интервале $|x - x_0| < \varepsilon$.

В силу предыдущей теоремы при возрастании λ каждый нуль функции $\omega(x, \lambda)$ передвигается влево. Через точку a нуль выйти не может, так как число нулей не убывает. Новые нули входят через точку b. Пусть μ_0 есть первое значение параметра λ, для которого $\omega(b, \lambda) = 0$. Такое значение, очевидно, найдется. Пусть μ_1 — второе значение параметра λ, для которого $\omega(b, \lambda) = 0$, и т. д. Последовательность чисел $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \ldots$ обладает тем свойством, что функция $\omega(x, \mu_m)$ имеет внутри интервала (a, b) ровно m нулей, причем $\omega(b, \mu_m) = 0$. Если $\sin\beta = 0$, то μ_m суть собственные значения, и в этом случае теорема доказана.

Пусть теперь $\sin\beta \neq 0$. Предположим, что $u(x)$ и $v(x)$ имеют то же самое значение, что и в теореме 1.2.1. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left\{u^2\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)\right\} =$$

$$= 2uu'\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) + u^2\left(\frac{u''}{u} - \frac{v''}{v}\right) - u^2\left(\frac{u'^2}{u^2} - \frac{v'^2}{v^2}\right) =$$

$$= u\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)\left\{2u' - u\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)\right\} + u^2\{h(x) - g(x)\} =$$

$$= \frac{(u'v - v'u)^2}{v^2} + u^2\{h(x) - g(x)\} > 0.$$

Поэтому функция $u^2\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$ монотонно возрастает во всяком интервале, где v не обращается в нуль. Предположим, что $u(x)$ и $v(x)$ имеют одинаковое число нулей внутри интервала (a, b).

Обозначим через x_ν ближайший слева от точки b нуль функции $u(x)$. Покажем, что в интервале $x_\nu \leqslant x \leqslant b$ не может быть нулей функции $v(x)$. В самом деле, в силу фундаментальной теоремы Штурма, между a и x_ν лежат по крайней мере ν нулей функции $v(x)$. Если бы $v(x)$ обращалась в нуль в интервале $x_\nu \leqslant x \leqslant b$, то во всем интервале (a, b) она имела бы больше нулей, чем функция $u(x)$, вопреки нашему предположению.

Интегрируя соотношение (1.2.7) в пределах от x_ν до b, мы получим

$$u^2(b)\left\{\frac{u'(b)}{u(b)}-\frac{v'(b)}{v(b)}\right\} > u^2(x_\nu)\left\{\frac{u'(x_\nu)}{u(x_\nu)}-\frac{v'(x_\nu)}{v(x_\nu)}\right\}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{u'(b)}{u(b)} > \frac{v'(b)}{v(b)}.$$

Примем $\omega(x, \lambda')$ за $u(x)$ и $\omega(x, \lambda'')$ за $v(x)$, где $\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$.

На основании предыдущего неравенства функция $\frac{\omega'(b, \lambda)}{\omega(b, \lambda)}$ в интервале (μ_m, μ_{m+1}) монотонно убывает. Так как $\omega(b, \mu_m)=0$, $\omega(b, \mu_{m+1})=0$, то эта функция должна убывать от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому внутри интервала (μ_m, μ_{m+1}) найдется одно значение λ_m, для которого

$$\frac{\omega'(b, \lambda_m)}{\omega(b, \lambda_m)}=-\operatorname{ctg}\beta.$$

λ_m есть, очевидно, собственное значение, а функция $\omega(x, \lambda_m)$ имеет внутри интервала (a, b) столько же нулей, что и функция $\omega(x, \mu_m)$. Теорема полностью доказана.

§ 3. Теорема о разложении по собственным функциям

В двух предыдущих параграфах мы доказали двумя различными методами существование бесчисленного множества собственных значений. Метод первого параграфа восходит к Лиувиллю, второго — к Штурму. В связи с этим граничную задачу (1.1.1) — (1.1.2) часто называют задачей Штурма-Лиувилля. Однако ни Штурм, ни Лиувилль не смогли доказать полноты собственных функций. Это было доказано В. А. Стекловым *). В дальнейшем теория интегральных уравнений позволила упростить доказательство полноты.

*) В. А. Стеклов, Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня. Сообщ. Харьк. матем. о-ва, 1896.

1. Будем искать решение уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = f(x) \tag{1.3.1}$$

($f(x) \not\equiv 0$ — непрерывная функция), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

Пусть λ есть фиксированное комплексное число. Обозначим через $u(x, \lambda)$ решение уравнения (1.3.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(a) = \sin\alpha, \quad u'(a) = -\cos\alpha,$$

и через $v(x, \lambda)$ — решение того же уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$v(b) = \sin\beta, \quad v'(b) = -\cos\beta.$$

Если $u(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$ линейно независимы, т. е. если $u(x, \lambda)$ не есть собственная функция *), то определитель Вронского

$$W\{u, v\} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наоборот, если для некоторого λ определитель Вронского равен 0, то $u = Cv$ и, значит, u есть собственная функция. Таким образом, собственные значения совпадают с нулями определителя Вронского. Так как в нашем случае коэффициент при первой производной равен нулю, то в силу известной формулы Лиувилля w от x не зависит:

$$w = w(\lambda).$$

Положим

$$G(x, y; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(\lambda)} u(x, \lambda) v(y, \lambda), & x \leqslant y, \\ \dfrac{1}{w(\lambda)} v(x, \lambda) u(y, \lambda), & x \geqslant y. \end{cases}$$

*) Если $u = Cv$, то u удовлетворяет граничным условиям (1.3.2) и является, следовательно, собственной функцией.

Функция $G(x, y; \lambda)$ по x и y симметрична и при действительных λ действительна. Покажем, что функция

$$y(x, \lambda) = \int_a^b G(x, y; \lambda) f(y)\, dy \tag{1.3.3}$$

есть решение уравнения (1.3.1), удовлетворяющее условиям (1.3.2) В самом деле,

$$y' = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{u'(x, \lambda)\int_a^x v(y, \lambda) f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + v'(x, \lambda)\int_x^b u(y, \lambda) f(y)\, dy\right\};$$

$$y'' = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{u''(x, \lambda)\int_a^x v(y, \lambda) f(y)\, dy + v''(x, \lambda)\int_x^b u(y, \lambda) f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + [u'(x, \lambda)\, v(x, \lambda) - v'(x, \lambda)\, u(x, \lambda)] f(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{w(x)}\left\{[q(x) - \lambda]\, u(x, \lambda)\int_a^x v(y, \lambda) f(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + [q(x) - \lambda]\, v(x, \lambda)\int_x^b u(y, \lambda) f(y)\, dy\right\} + f(x) =$$

$$= \{q(x) - \lambda\}\, y(x, \lambda) + f(x),$$

т. е.

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = f(x).$$

Непосредственно проверяется, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям (1.3.2).

Итак, *если* λ *не есть собственное значение однородной задачи* (1.1.1) — (1.1.2), *то система* (1.3.1) — (1.3.2) *разрешима при любой функции* $f(x)$. *Решение дается формулой* (1.3.3). Напротив, если λ есть собственное значение однородной задачи, то система (1.3.1) — (1.3.2), вообще говоря, неразрешима, Если λ не есть собственное значение однородной задачи, то система (1.3.1) — (1.3.2) имеет единственное решение. В самом деле, разность двух решений неоднородной задачи есть, очевидно, собственная функция однородной задачи и в силу нашего предположения она тождественно равна нулю.

Мы можем предположить, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением. В противном случае выберем фиксированное число η и рассмотрим граничную задачу

$$y'' + \{q(x) - (\lambda - \eta)\} y = 0,$$
$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0,$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0.$$

Собственные функции у этой задачи те же, что и у задачи (1.1.1) — (1.1.2). Все собственные значения сдвинутся вправо на η. Очевидно, что можно подобрать η так, чтобы для новой задачи число нуль не являлось уже собственным значением.

Положим

$$G(x, y; 0) = G(x, y).$$

Функция

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

есть решение уравнения

$$y'' - q(x) y = f(x),$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.3.2). Перепишем уравнение (1.3.1) в виде

$$y'' - q(x) y = f(x) - \lambda y.$$

На основании предыдущего можно утверждать, что решение системы (1.3.1) — (1.3.2) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$y + \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi)\, d\xi = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = g(x).$$

В частности, однородная задача $[f(x)\equiv 0]$ эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=0. \tag{1.3.4}$$

2. Обозначим через $v_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ совокупность всех нормированных собственных функций граничной задачи (1.1.1) — (1.1.2) и через $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — соответствующие собственные значения.

Рассмотрим ядро

$$H(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)\,v_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

В силу асимптотических формул, полученных*) в § 1, ряд для $H(x,\xi)$ сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, ядро $H(x,\xi)$ непрерывно. Рассмотрим теперь ядро

$$Q(x,\xi)=G(x,\xi)+H(x,\xi)=G(x,\xi)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)\,v_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Оно, очевидно, непрерывно и симметрично.

По известной теореме теории интегральных уравнений всякое симметрическое ядро $Q(x,\xi)$, не равное тождественно нулю, имеет по меньшей мере одну собственную функцию**), т. е. существуют число λ_0 и функция $u(x)\not\equiv 0$, удовлетворяющие уравнению

$$u(x)+\lambda_0\int_a^b Q(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi=0. \tag{1.3.5}$$

Таким образом, если мы покажем, что ядро

$$Q(x,\xi)=G(x,\xi)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)\,v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

---

*) Для наших целей достаточно, очевидно, пользоваться формулой (1.1.6) и, следовательно, не нужно требовать дифференцируемости $q(x)$. Аналогичное замечание справедливо для случаев h или $H=\infty$ и h и $H=\infty$. Соответствующие (менее точные) асимптотические формулы читатель может получить без труда.

**) См. И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, 1948, стр. 68.

не имеет собственных функций, то получим

$$Q(x, \xi) \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad G(x, \xi) \equiv -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x)\, v_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Из этого разложения уже легко получить полноту собственных функций.

Из уравнения (1.3.4) следует

$$\int_a^b G(x, \xi)\, v_n(\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\lambda_n} v_n(x).$$

Поэтому

$$\int_a^b Q(x, \xi)\, v_n(\xi)\, d\xi = 0,$$

т. е. ядро $Q(x, \xi)$ ортогонально ко всем собственным функциям граничной задачи (1.1.1) — (1.1.2).

Пусть $u(x)$ есть решение интегрального уравнения (1.3.5). Покажем, что функция $u(x)$ ортогональна ко всем $v_n(x)$. В самом деле, из уравнения (1.3.5) следует

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x)\, v_n(x)\, dx + \lambda_0 \int_a^b v_n(x)\, dx \int_a^b Q(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = \\ &= \int_a^b u(x)\, v_n(x)\, dx + \lambda_0 \int_a^b u(\xi)\, d\xi \int_a^b Q(x, \xi)\, v_n(x)\, dx = \\ &= \int_a^b u(x)\, v_n(x)\, dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$u(x) + \lambda_0 \int_a^b Q(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = u(x) + \lambda_0 \int_a^b G(x, \xi)\, u(\xi)\, dx,$$

т. е. $u(x)$ есть собственная функция граничной задачи (1.1.1)— (1.1.2). А так как $u(x)$ ортогональна ко всем $v_n(x)$, то

$$u(x) \equiv 0$$

и, следовательно, $Q(x, \xi) \equiv 0$.

Теорема 1.3.1. (Теорема о разложении.) *Если $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет граничным условиям* (1.3.2), *то $f(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям граничной задачи* (1.1.1) — (1.1.2)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n=\int_a^b f(x) v_n(x)\,dx. \qquad (1.3.6)$$

Доказательство. Положим

$$f''(x)-q(x)f(x)=h(x).$$

Тогда

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b v_n(\xi)\,h(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x).$$

Из ортогональности и нормированности $v_n(x)$ следует, что

$$a_n=\int_a^b f(x) v_n(x)\,dx.$$

Теорема 1.3.2. *Для каждой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом в интервале (a, b) имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2. \qquad (1.3.7)$$

Доказательство. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то равенство (1.3.7) следует непосредственно из равномерной сходимости ряда (1.3.6). В самом деле,

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b f(x)\,v_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом. Как известно *), можно указать последовательность дважды дифференцируемых (даже аналитических) функций $f_k(x)$, сходящуюся в среднем квадратичном к $f(x)$. Слегка изменяя $f_k(x)$ в окрестностях точек a и b, мы добьемся того, что $f_k(x)$ будут также удовлетворять граничным условиям (1.3.2). Поэтому

$$\int_a^b \{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n^{(k)}-a_n^{(l)}\}^2, \tag{1.3.8}$$

где

$$a_n^{(k)}=\int_a^b f_k(x)\,v_n(x)\,dx.$$

Если $k,\ l\to\infty$, то левая часть равенства (1.3.8) стремится к нулю. Значит, и правая часть стремится к нулю.

Из неравенства Коши-Буняковского следует

$$|a_n-a_n^{(k)}|\leqslant\left\{\int_a^b\{f(x)-f_k(x)\}^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

Поэтому из сходимости $f_k(x)$ в среднем к $f(x)$ следует

$$\lim_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

Обозначим через $N>0$ фиксированное целое положительное число. Из (1.3.8) следует

$$\sum_{n=0}^{N}\{a_n^{(k)}-a_n^{(l)}\}^2\leqslant\int_a^b\{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx.$$

Полагая здесь $k\to\infty$, мы получим

$$\sum_{n=0}^{N}\{a_n-a_n^{(l)}\}^2\leqslant\int_a^b\{f(x)-f_l(x)\}^2\,dx.$$

*) См., например, И. П. Натансон, Основы теории функций вещественного переменного, Изд. Ленинградского университета (1941), стр. 145. См. также Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1947, стр. 46.

Полагая теперь $N \to \infty$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n - a_n^{(l)}\}^2 \leqslant \int_a^b \{f(x) - f_l(x)\}^2\,dx.$$

Из этого неравенства, в частности, следует (с помощью неравенства Минковского) сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Так как

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^{(l)}\}^2\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n - a_n^{(l)}\}\{a_n + a_n^{(l)}\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_n^{(l)}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + a_n^{(l)}|^2\right)^{1/2},$$

то из предыдущего следует, что при $l \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^{(l)}\}^2 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

С другой стороны, из сходимости в среднем $f_l(x)$ к $f(x)$ следует

$$\int_a^b f_l^2(x)\,dx \to \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя в равенстве

$$\int_a^b f_l^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^{(l)}\}^2$$

к пределу ($l \to \infty$), мы получим равенство (1.3.7).

Замечание. Пусть $g(x)$ — другая функция с интегрируемым квадратом с рядом Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n v_n(x)$. Применяя равенство (1.3.7) вначале к сумме $f(x) + g(x)$, а затем к разности $f(x) - g(x)$ и вычитая, мы получим

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Последнее равенство легко распространяется на комплексные функции.

Следствие. *Непрерывная (комплексная) функция, ортогональная ко всем собственным функциям $v_n(x)$, тождественно равна нулю.*

В самом деле, пусть

$$\int_a^b f(x) v_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Применяя к произведению $f(x)\bar{f}(x) = |f(x)|^2$ равенство Парсеваля, мы получим

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx = 0.$$

В силу непрерывности $f(x)$ отсюда следует $f(x) \equiv 0$.

3. Возвратимся к формуле (1.3.3). Правую часть этой формулы назовем резольвентой. Мы знаем, что резольвента существует для всех λ, которые не являются собственными значениями граничной задачи (1.1.1)—(1.1.2).

Покажем теперь, как получить разложение в ряд Фурье для резольвенты, если известно разложение функции $f(x)$.

Функция $y(x, \lambda)$, определенная по формуле (1.3.3), удовлетворяет граничным условиям (1.3.2). Поэтому, интегрируя по частям, мы получим

$$\int_a^b \{y''(x, \lambda) - q(x) y(x, \lambda)\} v_n(x)\, dx =$$
$$= \int_a^b \{v_n''(x) - q(x) v_n(x)\} y(x, \lambda)\, dx =$$
$$= -\lambda_n \int_a^b y(x, \lambda) v_n(x)\, dx = -\lambda_n d_n(\lambda). \tag{1.3.9}$$

Пусть

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda) v_n(x), \quad a_n = \int_a^b f(x) v_n(x)\, dx.$$

Из (1.3.1) и (1.3.9) следует

$$a_n = \int_a^b \{y''(x, \lambda) + [\lambda - q(x)]y\} v_n(x)\,dx = -\lambda_n d_n(\lambda) + \lambda d_n(\lambda).$$

Отсюда

$$d_n(\lambda) = \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Следовательно, разложение резольвенты имеет вид

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} v_n(x). \tag{1.3.10}$$

§ 4. Уточнение теоремы разложения *)

Теорема разложения в ряд Фурье по собственным функциям была нами получена при весьма ограничительных условиях.

Асимптотические формулы для собственных функций, выведенные в первом параграфе, позволяют доказать, что разложение по собственным функциям сходится при тех же условиях, что и разложение в ряд Фурье по косинусам.

Для определенности рассмотрим случай $h \neq \infty$ и $H \neq \infty$. Будем также предполагать, что $q(x)$ имеет ограниченную производную, так что асимптотическая формула (1.1.9) имеет силу.

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая (по Лебегу) в интервале $(0, \pi)$ функция. Положим

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi f(t) \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{n} \cos rx \cos rt \right\} dt,$$

$$s_n(x) = \int_0^\pi f(t) \sum_{r=0}^{n} v_r(x) v_r(t)\,dt.$$

---

*) A. Haar, Math. Ann., Bd. 69 (1910), стр. 339.

Если

$$\Phi_n(x,\ t) = \sum_{r=0}^{n} v_r(x)\, v_r(t) - \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{n} \cos rx \cos rt \right\},$$

то

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \int_0^{\pi} \Phi_n(x,\ t)\, f(t)\, dt.$$

Лемма 1.4.1. *Существует такая постоянная M, что для всех n*

$$|\Phi_n(x,\ t)| < M.$$

Доказательство. Из асимптотической формулы (1.1.9) следует

$$v_r(x)\, v_r(t) - \frac{2}{\pi} \cos rx \cos rt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{\beta(t) \cos rx \sin rt + \beta(x) \cos rt \sin rx\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\beta(x) + \beta(t)\} \frac{\sin r(x+t)}{r} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\beta(x) - \beta(t)\} \frac{\sin r(x-t)}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (1.4.1)$$

Так как функция $\beta(x)$ и суммы $\sum_{r=1}^{n} \frac{\sin rx}{r}$ в интервале $(0,\ \pi)$ равномерно ограничены *), то настоящая лемма следует непосредственно из формулы (1.4.1).

Лемма 1.4.2. *Если функция $\varphi(x)$ в интервале $(0, \pi)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет*

---

*) В самом деле, так как все слагаемые суть периодические функции, то достаточно рассмотреть интервал

$$0 \leqslant x < 2\pi.$$

Имеем

граничным условиям (1.3.2), *то при* $n \to \infty$

$$\int_0^{\pi} \Phi_n(x, t)\varphi(t)\,dt \to 0.$$

Доказательство. В самом деле, при наших предположениях $s_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ стремятся равномерно к $\varphi(x)$. Следовательно, их разность

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \int_0^{\pi} \Phi_n(x, t)\varphi(t)\,dt$$

равномерно стремится к нулю.

Основываясь на предыдущих двух леммах, нетрудно уже доказать следующую замечательную теорему.

$$\tau_n(x) = \sum_1^n \frac{\sin rx}{r} = \int_0^x \left(\sum_{r=1}^n \cos rt\right) dt = \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{1}{2}x =$$

$$= \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{1}{2}x.$$

Но интеграл $\int_0^N \frac{\sin u}{u}\,du$ ограничен и имеет максимум при $N = \pi$. Поэтому для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$|\tau_n(x)| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right| dt + \frac{1}{2}\pi.$$

Теорема 1.4.1. *Для любой абсолютно интегрируемой по Лебегу в интервале* $(0, \pi)$ *функции* $f(x)$ *при* $n \to \infty$

$$s_n(x) - \sigma_n(x) \to 0$$

равномерно во всем интервале $(0, \pi)$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная, абсолютно интегрируемая функция. Как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, для любого $\varepsilon > 0$, можно подобрать дважды дифференцируемую и удовлетворяющую граничным условиям функцию $\varphi_\varepsilon(x)$ так, что

$$\int_0^\pi |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Далее имеем

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\{f(t) - \varphi_\varepsilon(x)\}\, dt + \\ + \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt.$$

На основании леммы 1.4.1

$$\left|\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\{f(t) - \varphi_\varepsilon(t)\}\, dt\right| \leqslant \\ \leqslant M \int_0^\pi |f(t) - \varphi_\varepsilon(t)|\, dt < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

На основании леммы 1.4.2 при фиксированном ε можно взять n настолько большим, что равномерно во всем интервале $(0, \pi)$ будет иметь место неравенство

$$\left|\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$|s_n(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon,$$

и так как число ε произвольно, то теорема доказана. В частности, разложение по собственным функциям Штурма-Лиувилля любой суммируемой функции сходится или расходится в любой точке интервала $(0, \pi)$ в зависимости от того, сходится или расходится ряд косинусов в этой точке.

В случае $h = \infty$ или $H = \infty$ разложение Штурма-Лиувилля следует сравнивать с разложением в ряд Фурье по функциям $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а в случае h и $H = \infty$ — с разложением в ряд по $\sin nx$.

В заключение настоящей главы заметим, что многие из доказанных нами теорем распространяются на более общее уравнение

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + \{\lambda r(x) - l(x)\}y = 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \quad (1.4.2)$$

где функции $p(x)$ и $r(x)$ положительны в интервале (a, b).

Впрочем, если предположить, что $p(x)$ имеет непрерывную первую производную, а $p(x)r(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то с помощью подстановок

$$z = \frac{1}{K}\int\limits_a^x \left(\frac{r}{p}\right)^{1/2} dx, \quad u = (rp)^{1/4}y, \quad \rho^2 = K^2\lambda,$$

где постоянная величина K равна

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \left(\frac{r}{p}\right)^{1/2} dx,$$

уравнение (1.4.2) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \{\rho^2 - q(z)\}u = 0,$$

где

$$q(z) = \left\{\frac{\theta''(z)}{\theta(z)} - K^2\varphi(z)\right\},$$

а $\theta(z)$ и $\varphi(z)$ суть соответственно $(rp)^{1/4}$ и $\frac{l}{r}$, выраженные как функции от z. При этом интервал $a \leqslant x \leqslant b$ преобразуется в интервал $0 \leqslant z \leqslant \pi$, а граничные условия своего вида не меняют.

ГЛАВА II

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

§ 1. Интервал $(0, \infty)$

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty), \tag{2.1.1}$$

где $q(x)$ — действительная, непрерывная в каждом конечном интервале, включая точку $x = 0$, функция.

Обозначим через $\psi(x, \lambda)$ решение уравнения (2.1.1) при начальных условиях

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = 0, \tag{2.1.2}$$

а через $\chi(x, \lambda)$ — решение того же уравнения при начальных условиях

$$\chi(0, \lambda) = 0, \quad \chi'(0, \lambda) = 1. \tag{2.1.3}$$

Если $\varphi(x, \lambda)$ есть также решение уравнения (2.1.1) при начальном условии

$$\varphi(0, \lambda) \cos \alpha + \varphi'(0, \lambda) \sin \alpha = 0, \tag{2.1.4}$$

то очевидно, что (α — действительное число)

$$\varphi(x, \lambda) = k [\sin \alpha \, \psi(x, \lambda) - \cos \alpha \, \chi(x, \lambda)], \tag{2.1.5}$$

где k — константа.

Пусть b — произвольное положительное и β — произвольное действительное число. Рассмотрим граничную задачу, определяемую уравнением (2.1.1), условием (2.1.4) и условием

$$\varphi(b, \lambda) \cos \beta + \varphi'(b, \lambda) \sin \beta = 0. \tag{2.1.6}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные значения этой задачи, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — соответствующие собственные функции

$[\varphi_m(x) = \varphi(x, \lambda_n)]$. Положим

$$\alpha_n^2 = \int_0^b \varphi_n^2(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат в интервале $(0, b)$. В силу равенства Парсеваля

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\int_0^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right\}^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^b f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_b(\lambda), \quad (2.1.7)$$

где

$$\rho_b(\lambda) = -\sum_{0 \geqslant \lambda_n > \lambda} \frac{1}{\alpha_n^2} \quad (\lambda \leqslant 0), \qquad \sum_{0 < \lambda \leqslant \lambda_n} \frac{1}{\alpha_n^2} \quad (\lambda > 0). \quad (2.1.7')$$

Функция $\rho_b(\lambda)$, очевидно, монотонно возрастает.

Лемма 2.1.1. *В каждом конечном интервале изменения λ вариация функций $\rho_b(\lambda)$ равномерно (по b) ограничена.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\sin\alpha \neq 0$. Так как условие (2.1.4) однородно, то можно считать, что $\sin\alpha > 0$. Пусть (μ, ν) — фиксированный интервал. В области $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$, $a \leqslant x \leqslant b$ (a, b — конечные числа) функции $\psi(x, \lambda)$ и $\chi(x, \lambda)$ равномерно непрерывны *).

Поэтому, а также в силу начальных условий (2.1.2) и (2.1.3) существует столь малое положительное число h, что для $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x, \lambda)\,dx > \frac{1}{2}\sin\alpha \text{ **}). \quad (2.1.8)$$

---

*) Это утверждение следует из ограниченности, в указанной конечной области, функций $\psi(x, \lambda)$ и $\chi(x, \lambda)$ и интегральных уравнений для этих функций, аналогичных интегральному уравнению (1.1.4)

**) Мы принимаем в формуле (2.1.5) $k = 1$.

К функции

$$f_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & 0\leqslant x<h,\\ 0, & h\leqslant x\leqslant\infty,\end{cases}$$

применим равенство (2.1.7). Мы получим

$$\int_0^h f_h^2(x)\,dx=\frac{1}{h}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(x,\lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_b(\lambda)\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\mu}^{\nu}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(x,\lambda)\,dx\right\}^2 d\rho_b(\lambda)>\frac{1}{4}\sin^2\alpha\,[\rho_b(\nu)-\rho_b(\mu)].\quad(2.1.9)$$

Отсюда непосредственно следует

$$\rho_b(\nu)-\rho_b(\mu)<\frac{4}{h\sin^2\alpha},$$

что и доказывает лемму, ибо интервал (μ,ν) был выбран произвольно.

Если $\sin\alpha=0$, то можно считать $\varphi(x,\lambda)=\chi(x,\lambda)$. В этом случае полагаем

$$f_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}, & 0\leqslant x<h,\\ 0, & h\leqslant x\leqslant\infty.\end{cases}$$

Так как $\chi(0,\lambda)=0$, то

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h\chi(x,\lambda)\,dx=\frac{1}{h^2}\int_0^h\{\chi(x,\lambda)-\chi(0,\lambda)\}\,dx=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_0^h x\chi'_x(\xi_x,\lambda)\,dx>\frac{1}{2h^2}\int_0^h x\,dx=\frac{1}{4},$$

если только h выбрано из условия, что $\chi'(x,\lambda)>\frac{1}{2}$ для $0\leqslant x<h$, $\mu\leqslant\lambda\leqslant\nu$. Доказательство заканчивается так же, как и в предыдущем случае.

2. Мы теперь в состоянии доказать равенство Парсеваля.

Теорема 2.1.1. *Пусть $f(x) \subset L_2(0, \infty)$. Существуют не зависящая от функции $f(x)$, монотонно возрастающая функция $\rho(\lambda)$ и функция $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$), так, что*

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{2.1.10}$$

Функция $F(\lambda)$ является пределом в среднем квадратичном последовательности непрерывных функций

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0\,^{*}). \tag{2.1.11}$$

Доказательство. Допустим вначале, что $f_n(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(0, n)$, удовлетворяет граничному условию (2.1.4) и имеет на полупрямой $(0, \infty)$ вторую производную с интегрируемым квадратом. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ — последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел. Пусть μ, ν суть точки непрерывности всех функций $\rho_{b_k}(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Такие точки найдутся, так как множество скачков всех функций $\rho_{b_k}(\lambda)$ счетно.

Если k_0 достаточно велико, то $b_k > n$ при $k \geqslant k_0$. Поэтому при $k \geqslant k_0$ можно применить к $f_n(x)$ равенство Парсеваля,

---

*) В последующем изложении равенство (2.1.11) сокращенно будем писать в виде

$$F(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

и мы получим ($\mu < 0$, $\nu > 0$)

$$\int_0^n f_n^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^n f_n(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx \right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} + \int_{\mu}^{\nu} + \int_{\nu}^{\infty} \left\{ \int_0^n f_n(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx \right\}^2 d\rho_{b_k}(\lambda) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \qquad (2.1.7')$$

Оценим теперь I_1. Имеем *)

$$I_1 = \sum_{\lambda_{r,k} < \mu} \frac{1}{\alpha_{r,k}^2} \left\{ \int_0^n f_n(x)\,\varphi(x, \lambda_{r,k})\,dx \right\}^2.$$

В силу формулы Грина ($f_n(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2.1.4) и (2.1.6)) имеем

$$\int_0^n f_n(x)\,\varphi(x, \lambda_{r,k})\,dx = -\frac{1}{\lambda_{r,k}} \int_0^n \{f_n'' - q(x) f_n\}\,\varphi(x, \lambda_{r,k})\,dx.$$

Поэтому в силу неравенства Бесселя

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{\lambda_{r,k} < \mu} \frac{1}{\alpha_{r,k}^2} \left\{ \int_0^n \{f_n'' - q(x) f_n\}\,\varphi(x, \lambda_{r,k})\,dx \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2} \int_0^n \{f_n'' - q(x) f\}^2\,dx.$$

---

*) $\lambda_{r,k}$ суть собственные числа, а $\varphi(x, \lambda_{r,k})$ — собственные функции граничной задачи

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0,$$
$$y(0)\sin\alpha + y'(0)\cos\alpha = 0,$$
$$y(b_k)\sin\beta + y'(b_k)\cos\beta = 0.$$

Точно так же доказывается, что

$$I_3 \leqslant \frac{1}{\nu^2} \int_0^n \{f_n'' - q(x) f\}^2 dx.$$

В силу этих оценок и леммы (2.1.1) мы в состоянии применить теоремы Хелли (см. дополнение 1, п. 2), которые обеспечивают существование предельной функции $\rho(\lambda)$ и возможность предельного перехода при $b \to \infty$ в (2.1.7′):

$$\int_0^n f_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\lambda)\, d\rho(\lambda),$$

где

$$G_n(\lambda) = \int_0^n f_n(x) \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом. Как известно, можно указать последовательность функций $f_n(x)$, удовлетворяющих предыдущим условиям (т. е. равных нулю вне интервала $(0, n)$, удовлетворяющих граничному условию (2.1.4) и имеющих непрерывную вторую производную на полупрямой) и условию

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \{f(x) - f_n(x)\}^2 dx = 0.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} \{f_n(x) - f_m(x)\}^2 dx \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

то по доказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{G_n(\lambda) - G_m(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_n(x) - f_m(x)\}^2 dx \to 0.$$

В силу полноты пространства функций с интегрируемым квадратом (относительно монотонной функции $\rho(\lambda)$ *)) из последнего равенства следует существование предельной функции $F(\lambda)$, удовлетворяющей равенству Парсеваля (2.1.10).

Остается показать, что при $n \to \infty$ функции

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx$$

сходятся в среднем к $F(\lambda)$.

Пусть $h(x)$ — другая функция с интегрируемым квадратом и $H(\lambda)$ построено по $h(x)$, так же как $F(\lambda)$ по $f(x)$. Очевидно, что

$$\int_0^\infty \{f(x) - h(x)\}^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda) - H(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda).$$

Полагая $h(x) = f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant n)$, $h(x) = 0$ $(x > n)$, мы получим

$$\int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda) = \int_n^\infty f^2(x)\,dx \to 0,$$

что и доказывает сходимость в среднем $F_n(\lambda)$ к $F(\lambda)$. В последующем мы увидим, что функция $\rho(\lambda)$ может определяться неоднозначно.

3. Пусть $f(x)$, $g(x) \subset L_2(0, \infty)$ и $F(\lambda)$ $G(\lambda)$ — их преобразования Фурье. Легко видеть, что функции $f(x) \pm g(x)$ имеют своими преобразованиями Фурье функции $F(\lambda) \pm G(\lambda)$.

---

*) Излагаемое обычно доказательство полноты пространства функций $L_2(-\infty, \infty)$ (см., например, Л. А. Люстерник, Успехи матем. наук, т. I (старая серия), или Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947, стр. 47) дословно переносится на интегралы Лебега-Стильтьеса. Основные понятия, относящиеся к интегралу Стильтьеса и Лебега-Стильтьеса, изложены в пятом томе «Курса высшей математики» В. И. Смирнова.

Поэтому

$$\int_0^\infty \{f(x)+g(x)\}^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda)+G(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda),$$

$$\int_0^\infty \{f(x)-g(x)\}^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda)-G(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, мы получим

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\,G(\lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad (2.1.12)$$

4. Теорема 2.1.2. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ и интеграл*

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda)\,F(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале. Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda)\,F(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Доказательство. Пусть $g(x)$ есть непрерывная функция, равная нулю вне конечного интервала $(0, n)$. В этом случае равенство (2.1.12) запишется в виде

$$\int_0^n f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\left\{\int_0^n g(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx\right\}d\rho(\lambda).$$

В последнем интеграле в силу абсолютной сходимости можно изменить порядок интегрирования, и мы получим

$$\int_0^n f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^n g(x)\left\{\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)\right\}dx.$$

В силу произвольности непрерывной функции $g(x)$, а также непрерывности функций $f(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)$ (непрерывность последней функции следует из предполагаемой равномерной сходимости интеграла) мы получим

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Интервал $(-\infty, \infty)$

Рассмотрим уравнение (2.1.1), предполагая теперь, однако, что x изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$ и $q(x)$ — непрерывная в каждом конечном интервале функция. Пусть функции $\psi(x, \lambda)$ и $\chi(x, \lambda)$ имеют то же значение, что и в пункте 1 предыдущего параграфа.

Пусть (a, b) — произвольный конечный интервал. Рассмотрим граничную задачу, определяемую уравнением (2.1.1) и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} y(a)\sin\alpha + y'(a)\cos\alpha &= 0, \\ y(b)\sin\beta + y'(b)\cos\beta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

где α и β — произвольные действительные числа.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные значения и $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots$ — соответствующие собственные функции этой задачи. Пусть

$$y_n(x) = \beta_n\psi(x, \lambda_n) + \gamma_n\chi(x, \lambda_n).$$

Так как рассматриваемая задача однородна, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать $|\beta_n| \leqslant 1$, $|\gamma_n| \leqslant 1$. Положим

$$\alpha_n^2 = \int\limits_a^b y_n^2(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат в интервале (a, b). Применяя к $f(x)$ равенство Парсеваля, получим

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\int_a^b f(x)\,[\beta_n\psi(x, \lambda_n) + \gamma_n\chi(x, \lambda_n)]\,dx\right\}^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\left\{\int_a^b f(x)\,\psi(x, \lambda_n)\,dx\right\}^2 +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n\gamma_n}{\alpha_n^2}\int_a^b f(x)\,\psi(x, \lambda_n)\,dx \int_a^b f(x)\,\chi(x, \lambda_n)\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{\alpha_n^2}\left\{\int_a^b f(x)\,\chi(x, \lambda_n)\,dx\right\}^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^b f(x)\,\psi(x, \lambda)\,dx\right\} d\xi_{a,b}(\lambda) +$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^b f(x)\,\psi(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_a^b f(x)\,\chi(x, \lambda)\,dx\right\} d\eta_{a,b}(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^b f(x)\,\chi(x, \lambda)\,dx\right\}^2 d\zeta_{a,b}(\lambda),$$

где

$$\xi_{a,b}(\lambda) = \sum_{0<\lambda_n\leqslant\lambda} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\ (\lambda > 0), \quad -\sum_{0\geqslant\lambda_n>\lambda} \frac{\beta_n^2}{\alpha_n^2}\ (\lambda \leqslant 0);$$

$$\eta_{a,b}(\lambda) = \sum_{0<\lambda_n\leqslant\lambda} \frac{\beta_n\gamma_n}{\alpha_n^2}\ (\lambda > 0), \quad -\sum_{0\geqslant\lambda_n>\lambda} \frac{\beta_n\gamma_n}{\alpha_n^2}\ (\lambda \leqslant 0);$$

$$\zeta_{a,b}(\lambda) = \sum_{0<\lambda_n\leqslant\lambda} \frac{\gamma_n^2}{\alpha_n^2}\ (\lambda > 0), \quad -\sum_{0\geqslant\lambda_n>\lambda} \frac{\gamma_n^2}{\alpha_n^2}\ (\lambda \leqslant 0).$$

Лемма 2.2.1. *Вариация функций $\xi_{a,b}(\lambda)$, $\eta_{a,b}(\lambda)$, $\zeta_{a,b}(\lambda)$ ограничена равномерно по a, b в каждом конечном интервале изменения переменной λ.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть функции $\xi_{a,b}(\lambda)$ и $\zeta_{a,b}(\lambda)$, так как для $\eta_{a,b}(\lambda)$ утверждение леммы будет следовать из неравенства Коши-Буняковского.

Рассмотрим вначале $\xi_{a,b}(\lambda)$. Пусть $f_h(x)$ имеет то же значение, что и в лемме 2.1.1. Применяя к $f_h(x)$ равенство Парсеваля, получим

$$\int_0^h f_h^2(x)\,dx \geqslant \sum_{\mu\leqslant\lambda_n\leqslant\nu} \frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h [\beta_n\psi(x,\lambda_n)+\gamma_n\chi(x,\lambda_n)]\,dx\right\}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\mu\leqslant\lambda_n\leqslant\nu}{}' \frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h [\beta_n\psi(x,\lambda_n)+\gamma_n\chi(x,\lambda_n)]\,dx\right\}^2,$$

где $\sum'$ распространяется на те n, для которых $\beta_n\neq 0$; (μ,ν) — фиксированный конечный интервал.

Учитывая, что $|\gamma_n|\leqslant 1$ и $\chi(0,\lambda)=0$, мы получаем для h достаточно малых и $\mu\leqslant\lambda_n\leqslant\nu$

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h [\beta_n\psi(x,\lambda_n)+\gamma_n\chi(x,\lambda_n)]\,dx\right\}^2 \geqslant \frac{\beta_n^2}{2},$$

и доказательство заканчивается точно так же, как и в лемме 2.1.1.

Теперь рассмотрим $\zeta_{a,b}(\lambda)$. Пусть функции $\varphi_h(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi_h(x)\geqslant 0$, причем для $|x|\geqslant h$ $\varphi_h(x)=0$;

2) $\varphi_h'(x)\subset L_2(-\infty,\infty)$;

3) $\int_{-h}^{h}\varphi_h(x)\,dx=1$.

Применяя к $\varphi_h'(x)$ равенство Парсеваля, мы получим

$$\int_{-h}^{h}\{\varphi_h'(x)\}^2\,dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\int_{-h}^{h}\varphi_h'(x)\,[\beta_n\psi(x,\lambda_n)+\gamma_n\chi(x,\lambda_n)]\,dx\right\}^2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-h}^{h} \{\varphi_h'(x)\}^2 dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ \int_{-h}^{h} \varphi_h(x) [\beta_n \psi'(x, \lambda_n) + \gamma_n \chi'(x, \lambda_n)] dx \right\}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\mu \leqslant \lambda_n \leqslant \nu}' \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ \int_{-h}^{h} \varphi_h(x) [\beta_n \psi'(x, \lambda_n) + \gamma_n \chi'(x, \lambda_n)] dx \right\}^2,$$

где $\sum'$ распространяется на те n, для которых $\gamma_n \neq 0$. Подбирая h достаточно малым, мы получим в силу условий (2.1.2) и (2.1.3), а также условия $|\beta_n| \leqslant 1$

$$\left\{ \int_{-h}^{h} \varphi_h(x) [\beta_n \psi'(x, \lambda_n) + \gamma_n \chi'(x, \lambda_n)] dx \right\}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma_n^2}{2} \quad (\mu \leqslant \lambda_n \leqslant \nu),$$

и доказательство завершается, как в лемме 2.1.1.

Теорема 2.2.1. *Существуют монотонные, ограниченные функции $\xi(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ и функция с ограниченной в каждом конечном интервале вариацией $\eta(\lambda)$ такие, что если $f(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(-n, n)$ и имеет вторую производную с интегрируемым квадратом, то*

$$\int_{-n}^{n} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\xi(\lambda) +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\lambda) d\eta(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\zeta(\lambda), \qquad (2.2.2)$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-n}^{n} f(x) \psi(x, \lambda) dx, \quad G(\lambda) = \int_{-n}^{n} f(x) \chi(x, \lambda) dx. \; (2.2.3)$$

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 2.1.1,

$$\sum_{|\lambda_r| \geqslant \mu} \frac{1}{\alpha_r^2} \left\{ \int_{-n}^{n} f(x) y_r(x)\, dx \right\}^2 \leqslant \frac{2}{\mu^2} \int_{-n}^{n} \{f'' - q(x) f\}^2 dx.$$

Поэтому, а также в силу предыдущей леммы, можно пользоваться теоремами Хелли, и формула (2.2.2) получается предельным переходом из формулы Парсеваля для конечного промежутка.

Обобщением формулы (2.2.2) на более широкие классы функций мы здесь заниматься не будем.

ГЛАВА III

СПЕКТР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе будет рассматриваться полуось $(0, \infty)$. Для этого случая спектр оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - q(x)$$

можно определить как множество, дополнительное к множеству точек, в окрестности которых $\rho(\lambda)$ постоянна. В случае всей оси $(-\infty, \infty)$ спектр есть дополнение к множеству точек, в окрестности которых все функции $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ постоянны.

Мы рассмотрим следующие случаи:

1) $q(x) \subset L(0, \infty)$. Будет показано, что в этом случае в интервале $(0, \infty)$ спектр непрерывен, а в интервале $(-\infty, 0)$ дискретен (в частности, отрицательный спектр может вовсе отсутствовать).

2) $q(x) \to +\infty$. Спектр чисто точечный.

3) $q(x) \to -\infty$, $\int^{\infty} |q(x)|^{-1/2}\, dx = \infty$. Спектр непрерывен на всей оси.

3′) $q(x) \to -\infty$, $\int^{\infty} |q(x)|^{-1/2}\, dx < \infty$. Спектр чисто точечный.

В случаях 2), 3) и 3′) на $q(x)$ следует наложить дополнительные условия, которые будут в надлежащих местах указаны.

§ 1. Случай $q(x) \subset L(0, \infty)$

1. Лемма 3.1.1. *Пусть в интервале* $0 \leqslant x \leqslant X$ $f(x)$ — *непрерывна и неотрицательна,* $g(x)$ — *интегрируема и неотрицательна и пусть*

$$f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)\, g(t)\, dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant X). \tag{3.1.1}$$

Тогда

$$f(x) \leqslant Ce^{\int_0^x g(t)\, dt} \qquad (0 \leqslant x \leqslant X). \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Положим

$$y = \int_0^x f(t)\, g(t)\, dt; \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)\, g(x).$$

Помножив неравенство (3.1.1) на $g(x)$, мы получим

$$\frac{dy}{dx} \leqslant Cg(x) + y \cdot g(x);$$

отсюда

$$\frac{d}{dx}\left\{ye^{-\int_0^x g(t)\, dt}\right\} \leqslant Cg(x)\, e^{-\int_0^x g(t)\, dt}$$

Интегрируя в пределах 0, x, получим

$$ye^{-\int_0^x g(t)\, dt} \leqslant C\left\{1 - e^{-\int_0^x g(t)\, dt}\right\}; \quad y \leqslant C\left\{e^{\int_0^x g(t)\, dt} - 1\right\},$$

откуда (3.1.2) следует непосредственно, ибо в силу (3.1.1)

$$f(x) \leqslant C + y.$$

2. Обозначим через $\omega(x, \lambda)$ решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \tag{3.1.3}$$

с начальными условиями

$$\omega(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \omega'_x(0, \lambda) = -\cos\alpha. \tag{3.1.4}$$

Переписывая уравнение (3.1.3) в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = q(x)\,y,$$

считая правую часть известной и применяя метод вариации произвольных постоянных, мы получим $(\sqrt{\lambda} = s)$

$$\omega(x, \lambda) = \cos sx \sin\alpha - \frac{\sin sx}{s}\cos\alpha + \\ + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)\, q(t)\, \omega(t, \lambda)\, dt. \tag{3.1.5}$$

Пусть $s = \sigma + i\tau$, $\tau \geqslant 0$ и $\omega_1(x, \lambda) = \omega(x, \lambda)\, e^{-\tau x}$. Из (3.1.5) следует

$$\omega_1(x, \lambda) = e^{-\tau x}\cos sx \sin\alpha - e^{-\tau x}\frac{\sin sx}{s}\cos\alpha + \\ + \frac{1}{s}\int_0^x e^{-\tau(x-t)}\sin s(x-t)\, q(t)\, \omega_1(t, \lambda)\, dt.$$

Так как $|\cos sx| \leqslant e^{\tau x}$, $|\sin sx| \leqslant e^{\tau x}$, то из последнего равенства следует

$$|\omega_1(x, \lambda)| \leqslant 1 + \frac{1}{|s|} + \frac{1}{|s|}\int_0^x |q(t)\, \omega_1(t, \lambda)|\, dt.$$

Поэтому применима лемма 3.1.1, и мы получим

$$|\omega_1(x, \lambda)| \leqslant \left(1 + \frac{1}{|s|}\right)\exp\left(\frac{1}{|s|}\int_0^x |q(t)|\, dt\right). \tag{3.1.6}$$

Так как по условию $q(t) \subset L(0, \infty)$, то из последнего неравенства следует, что $\omega_1(x, \lambda)$ ограничена для $0 \leqslant x \leqslant \infty$, $|s| \geqslant \rho > 0$, $\tau \geqslant 0$.

Если s вещественно ($\tau=0$), то $\omega(x, \lambda)$ ограничена для $s \geqslant \rho > 0$. Поэтому из (3.1.5) следует ($x \to \infty$)

$$\omega(x, \lambda) = \cos sx \sin\alpha - \frac{\sin sx}{s}\cos\alpha + \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin s(x-t)\, q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt - \frac{1}{s}\int_x^\infty \sin s(x-t)\,q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt =$$

$$= \mu(\lambda)\cos sx + \nu(\lambda)\sin sx + o(1), \tag{3.1.7}$$

где

$$\mu(\lambda) = \sin\alpha - \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin st\, q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt, \tag{3.1.8}$$

$$\nu(\lambda) = -\frac{\cos\alpha}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos st\, q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt. \tag{3.1.9}$$

Точно так же, если $\theta(x, \lambda)$ есть решение уравнения (3.1.3) при начальных условиях $\theta(0, \lambda) = \cos\alpha$, $\theta'_x(0, \lambda) = -\sin\alpha$, то при $x \to \infty$

$$\theta(x, \lambda) = \mu_1(\lambda)\cos sx + \nu_1(\lambda)\sin sx + o(1), \tag{3.1.7$'$}$$

где

$$\mu_1(\lambda) = \cos\alpha - \frac{1}{s}\int_0^\infty \sin st\, q(t)\,\theta(t,\lambda)\,dt, \tag{3.1.8$'$}$$

$$\nu_1(\lambda) = -\frac{\sin\alpha}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cos st\, q(t)\,\theta(t,\lambda)\,dt. \tag{3.1.9$'$}$$

Дифференцируя (3.1.5) по x, мы получим

$$\omega'_x(x,\lambda) = -s\sin sx\sin\alpha - \cos sx\cos\alpha + \int_0^x \cos s(x-t)\,q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt. \tag{3.1.10}$$

Поэтому при $x\to\infty$

$$\omega'_x(x, \lambda) = -s\mu(\lambda)\sin sx + s\nu(\lambda)\cos sx + o(1). \qquad (3.1.10')$$

Точно так же

$$\theta'_x(x, \lambda) = -s\mu_1(\lambda)\sin sx + s\nu_1(\lambda)\cos sx + o(1).$$

Рассмотрим определитель Вронского для $\omega(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$. Так как уравнение (3.1.3) не содержит первой производной, то в силу известной формулы Лиувилля определитель Вронского равен постоянному числу. Поэтому

$$w\{\omega, \theta\} = w\{\omega, \theta\}_{x=0} = 1 =$$
$$= w\{\mu(\lambda)\cos sx + \nu(\lambda)\sin sx,\ \mu_1(\lambda)\cos sx + \nu_1(\lambda)\sin sx\} +$$
$$+ o(1) = s[\mu(\lambda)\nu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda)\nu(\lambda)] + o(1).$$

Из равенства

$$s[\mu(\lambda)\nu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda)\nu(\lambda)] + o(1) = 1,$$

учитывая, что правая часть от x не зависит, следует

$$\mu(\lambda)\nu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda)\nu(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \qquad (3.1.11)$$

Из последней формулы, в частности, следует, что функции $\mu(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ не могут обратиться в нуль для одного и того же значения λ.

3. Рассмотрим теперь комплексные значения λ. Если τ — фиксированное положительное число, то из (3.1.5) следует

$$\omega(x, \lambda) = \frac{1}{2}e^{-isx}\sin\alpha + \frac{e^{-isx}}{2is}\cos\alpha + O(e^{-\tau x}) -$$
$$-\frac{1}{2is}\int_0^x e^{-is(x-t)}q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt +$$
$$+ O\left(\int_0^x e^{-\tau(x-t)}|q(t)|\,|\omega(t, \lambda)|\,dt\right).$$

Так как $|\omega(t, \lambda)| = O(e^{\tau t})$, то $\left(\text{полагая, например, } \delta = \frac{1}{2}x\right)$

$$O\left(\int_0^x e^{-\tau(x-t)}\,|q(t)|\,|\omega(t, \lambda)|\,dt\right) = O\left(\int_0^x e^{\tau(2t-x)}|q(t)|\,dt\right) =$$

$$= O\left(e^{\tau(x-2\delta)}\int_0^{x-\delta}|q(t)|\,dt\right) + O\left(e^{\tau x}\int_{x-\delta}^{x}|q(t)|\,dt\right) = o(e^{\tau x}).$$

С другой стороны,

$$\int_x^\infty e^{-is(x-t)}\,q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt = O\left(e^{\tau x}\int_x^\infty |q(t)|\,dt\right) = o(e^{\tau x}).$$

Поэтому

$$\omega(x, \lambda) = e^{-isx}\,[M(\lambda) + o(1)], \tag{3.1.12}$$

где

$$M(\lambda) = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2is}\cos\alpha - \frac{1}{2is}\int_0^\infty e^{ist}q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt. \tag{3.1.13}$$

Если воспользоваться формулой (3.1.10), то мы получим

$$\omega'_x(x, \lambda) = -ise^{-isx}\,[M(\lambda) + o(1)]. \tag{3.1.14}$$

Аналогично

$$\theta(x, \lambda) = e^{-isx}\,[M_1(\lambda) + o(1)], \tag{3.1.12'}$$

где

$$M_1(\lambda) = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2is} - \frac{1}{2is}\int_0^\infty e^{-ist}q(t)\,\theta(t, \lambda)\,dt. \tag{3.1.13'}$$

4. Мы располагаем теперь всеми вспомогательными средствами для исследования спектра оператора L. Пусть $b > 0$. Рассмотрим в конечном интервале $(0, b)$ граничную задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0, \\ &y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \\ &y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.15}$$

Обозначим через $\lambda_1^{(b)}, \lambda_2^{(b)}, \ldots$ собственные значения этой задачи. В силу асимптотических формул (3.1.7) и (3.1.10′) положительные $\lambda_k^{(b)}$ суть корни уравнения

$$\mu_\beta(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,b - \nu_\beta(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\,b = o(1), \tag{3.1.16}$$

где

$$\mu_\beta(\lambda) = \mu(\lambda)\cos\beta + \sqrt{\lambda}\,\nu(\lambda)\sin\beta,$$

$$\nu_\beta(\lambda) = \nu(\lambda)\cos\beta - \sqrt{\lambda}\,\mu(\lambda)\sin\beta.$$

В силу (3.1.11) $(\lambda > 0)$

$$\mu_\beta^2(\lambda) + \nu_\beta^2(\lambda) = \{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)\}\{\cos^2\beta + \lambda\sin^2\beta\} > 0.$$

Полагая

$$\frac{\mu_\beta(\lambda)}{[\mu_\beta^2(\lambda) + \nu_\beta^2(\lambda)]^{1/2}} = \sin\omega(\lambda); \quad \frac{\nu_\beta(\lambda)}{[\mu_\beta^2(\lambda) + \nu_\beta^2(\lambda)]^{1/2}} = \cos\omega(\lambda),$$

мы перепишем уравнение (3.1.16) в виде

$$\sin[\sqrt{\lambda}\,b + \omega(\lambda)] = o(1). \tag{3.1.16′}$$

Лемма 3.1.2. *Пусть* λ_1 *и* λ_2 — *последовательные положительные корни уравнения* (3.1.16′). *При* $b \to \infty$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = o(1).$$

Доказательство. Если $\sqrt{\lambda}\,b$ изменится на 2π, то $\sqrt{\lambda}$ изменится на $\frac{2\pi}{b}$ и, следовательно, в силу непрерывности $\omega(\lambda)$ $\sin[\sqrt{\lambda}\,b + \omega(\lambda)]$ по крайней мере дважды переменит знак.

Лемма 3.1.3. (*Уточнение предыдущей леммы.*) *При* $b \to \infty$

$$\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Если λ_1 есть корень уравнения (3.1.16′), то

$$\sqrt{\lambda_1}\,b + \omega(\lambda_1) = n\pi + o(1),$$

где n — целое положительное число. Пусть λ_2 — следующий за λ_1 корень уравнения (2.1.16′). В силу непрерывности $\omega(\lambda)$ и предыдущей леммы

$$\omega(\lambda_2) = \omega(\lambda_1) + o(1).$$

Поэтому

$$\sqrt{\lambda_2}\, b + \omega(\lambda_2) = (n+1)\pi + o(1) = \\ = \sqrt{\lambda_1}\, b + \omega(\lambda_2) + \pi + o(1),$$

откуда

$$(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1})\, b = \pi + o(1),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.1.1. *Если* $q(x) \subset L(0, \infty)$, $\lambda > 0$, $\lambda + \Delta > \lambda$, *то*

$$\Delta\rho(\lambda) = \rho(\lambda + \Delta) - \rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\,[\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)]}. \tag{3.1.17}$$

Доказательство. В силу формулы (2.1.7′) и леммы (3.1.3)

$$\rho_b(\lambda + \Delta) - \rho_b(\lambda) = \Delta\rho_b(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{1}{\int\limits_0^b \omega^2(x, \lambda_k^{(b)})\, dx} =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}^{(b)}} - \sqrt{\lambda_k^{(b)}}}{\left(\sqrt{\lambda_{k+1}^{(b)}} - \sqrt{\lambda_k^{(b)}}\right) \int\limits_0^b \omega^2(x, \lambda_k^{(b)})\, dx} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{\lambda_{k+1}^{(b)} - \lambda_k^{(b)}}{\left(\sqrt{\lambda_{k+1}^{(b)}} + \sqrt{\lambda_k^{(b)}}\right) \frac{1}{b} \int\limits_0^b \omega^2(x, \lambda_k^{(b)})\, dx + o(1)}.$$

В силу асимптотической формулы (3.1.7)

$$\frac{1}{b} \int_0^b \omega^2(x, \lambda_k^{(b)})\, dx = \frac{1}{2}[\mu^2(\lambda_k^{(b)}) + \nu^2(\lambda_k^{(b)})] + o(1).$$

Поэтому

$$\Delta\rho_b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{(b)}}\,[\mu^2(\lambda_k^{(b)}) + \nu^2(\lambda_k^{(b)})]} + o(1) \right\} \times \\ \times (\lambda_{k+1}^{(b)} - \lambda_k^{(b)}) \to \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\,[\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)]},$$

что и требовалось доказать.

5. Рассмотрим теперь спектр отрицательных λ. Пусть $\sqrt{\lambda} = i\tau$. Из формул (3.1.12) и (3.1.14) следует

$$\omega(b, \lambda)\cos\beta + \omega'(b, \lambda)\sin\beta = e^{\tau b}[M_\beta(\lambda) + o(1)], \quad (3.1.18)$$

где

$$M_\beta(\lambda) = M(\lambda)[\cos\beta + \tau\sin\beta],$$

$$M(\lambda) = \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}\int_0^\infty e^{-\tau t} q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt.$$

Лемма 3.1.4. *$M(\lambda)$ есть аналитическая функция от $s = \sqrt{\lambda}$, регулярная в полуплоскости $I(s) > 0$.*

Доказательство. Если $q(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала, то утверждение леммы непосредственно следует из (3.1.13).

Рассмотрим общий случай. Пусть

$$q_n(x) = \begin{cases} q(x), & 0 \leqslant x < n, \\ 0, & x \geqslant n, \end{cases}$$

и $M_n(\lambda)$ строится по $q_n(x)$, так же как $M(\lambda)$ по $q(x)$. Очевидно, $M_n(\lambda)$ является аналитической функцией λ, несмотря на то, что $q_n(x)$ имеет точку разрыва при $x = n$. Так как $|\omega(x, \lambda)| = O(e^{\tau x})$, то из формулы для $M(\lambda)$ (формула (3.1.13)) следует, что последовательность $M_n(\lambda)$ сходится к $M(\lambda)$ равномерно в каждой области, которая лежит целиком в верхней полуплоскости, причем $M_n(\lambda)$ остаются ограниченными. Поэтому предельная функция $M(\lambda)$ регулярна для $I(s) > 0$.

Теорема 3.1.2. *Спектр отрицательных λ дискретен и снизу ограничен.*

Доказательство. Из формулы (3.1.18) следует, что отрицательные собственные значения граничной задачи в интервале $(0, b)$ суть нули функции $M_\beta(\lambda) + o(1)$. Поэтому при $b \to \infty$ отрицательные собственные значения будут стремиться к решениям уравнения

$$M_\beta(\lambda) = M(\lambda)[\cos\beta + \tau\sin\beta] = 0.$$

Нам остается показать, что нули функции $M(\lambda)$ ограничены снизу. Если $\sin\alpha \neq 0$, то $M(\lambda) \sim \frac{1}{2}\sin\alpha$, откуда следует, что нули $M(\lambda)$ ограничены снизу. Если $\sin\alpha = 0$, то при $|s| \to \infty$

$$M(\lambda) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) = o(1).$$

Поэтому из (3.1.12) следует

$$\omega(t, \lambda) = o(e^{\tau t}).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{2is}\int_0^\infty e^{-\tau t} q(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt\right| = o\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

и поэтому из формулы (3.1.13) следует, что

$$M(\lambda) = \frac{\cos\alpha}{2is} + o\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

откуда и вытекает наше утверждение *).

§ 2. Преобразование основного уравнения

В некоторых случаях уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0 \tag{3.2.1}$$

с неограниченно растущим $q(x)$ можно путем подходящей замены преобразовать к другому виду, допускающему вывод асимптотических формул.

Предположим сначала, что λ — действительное число, $q'(x)$, $q''(x)$ непрерывны. Положим

$$\xi(x) = \int_0^x \{\lambda - q(t)\}^{1/2}\,dt; \quad \eta(x) = \{\lambda - q(x)\}^{1/4}\,y.$$

*) В пятой главе мы покажем, что отрицательные собственные значения не зависят от β. В нашем выводе сомнение может вызвать число $\tau = \operatorname{ctg}\beta$.

Тогда

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{d\eta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi}=$$

$$=\left[\{\lambda-q(x)\}^{1/4}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}\frac{q'(x)}{\{\lambda-q(x)\}^{3/4}}y\right]\frac{1}{\{\lambda-q(x)\}^{1/2}}=$$

$$=\{\lambda-q(x)\}^{-1/4}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}\frac{q'(x)}{\{\lambda-q(x)\}^{5/4}}y,$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\Big\{[\lambda-q(x)]^{-1/4}\frac{d^2y}{dx^2}-$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{q''(x)}{\{\lambda-q(x)\}^{5/4}}+\frac{5}{4}\frac{q'^2(x)}{\{\lambda-q(x)\}^{9/4}}\right]y\Big\}\frac{1}{\{\lambda-q(x)\}^{1/2}}.$$

Поэтому из (3.2.1) следует

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\eta+\left[\frac{1}{4}\frac{q''(x)}{\{\lambda-q(x)\}^2}+\frac{5}{16}\frac{q'^2(x)}{\{\lambda-q(x)\}^3}\right]\eta=0. \quad (3.2.2)$$

Пусть $\eta=\varphi(\xi)$. Из (3.2.2) следует, что $\varphi(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(\xi)=\varphi(0)\cos\xi+\varphi'(0)\sin\xi-$$

$$-\int_0^\xi \sin(\xi-\tau)\left[\frac{1}{4}\frac{q''(t)}{\{\lambda-q(t)\}^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{16}\frac{q'^2(t)}{\{\lambda-q(t)\}^3}\right]\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (3.2.3)$$

где

$$\tau=\xi(t).$$

Отсюда можно получить асимптотические формулы для $\varphi(\xi)$.

Если λ недействительно или $q(x)>\lambda$, то ξ также недействительно, и предыдущая формула содержит интегралы вдоль комплексных путей. Это неудобно. Можно, однако, получить интегральное уравнение для $\varphi(\xi)$, не прибегая к выходу в комплексную область. Пусть $q(0)=0$ (в противном случае следует перенести начало отсчета оси λ) и

$$P(x)=\{\lambda-q(x)\}^{1/4}\frac{d}{dx}\left[\{\lambda-q(x)\}^{-1/2}\frac{d\eta}{dx}\right]-\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$=\{\lambda-q(x)\}^{1/4}\frac{d}{dx}\left[\{\lambda-q(x)\}^{-1/4}\frac{dy}{dx}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\frac{q'(x)}{\{\lambda-q(x)\}^{5/4}}y\right]-\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\frac{q''(x)}{\{\lambda-q(x)\}}+\frac{5}{16}\frac{q'^2(x)}{\{\lambda-q(x)\}^2}\right]y. \qquad (3.2.4)$$

В силу (3.2.1) и (3.2.4)

$$I=\int_0^x \sin\{\xi(x)-\xi(t)\}\frac{P(t)}{\{\lambda-q(t)\}^{1/4}}dt=$$

$$=\int_0^x \sin\{\xi(x)-\xi(t)\}\frac{d}{dt}\left[\{\lambda-q(t)\}^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right]dt+$$

$$+\int_0^x \sin\{\xi(x)-\xi(t)\}\{\lambda-q(t)\}^{3/4}y\,dt=I_1+I_2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1=\left[\sin\{\xi(x)-\xi(t)\}\{\lambda-q(t)\}^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right]_0^x+$$

$$+\int_0^x \cos\{\xi(x)-\xi(t)\}\frac{d\eta}{dt}dt=$$

$$=-\eta'(0)\lambda^{-1/2}\sin\xi(x)+[\cos\{\xi(x)-\xi(t)\}\eta(t)]_0^x-$$

$$-\int_0^x \sin\{\xi(x)-\xi(t)\}\{\lambda-q(t)\}^{1/2}dt=$$

$$=-\eta'(0)\lambda^{-1/2}\sin\xi(x)+\eta(x)-\eta(0)\cos\xi(x)-I_2.$$

Поэтому

$$\eta(x) = \eta(0)\cos\xi(x) + \eta'(0)\lambda^{-1/2}\sin\xi(x) + I,$$

т. е. $\eta(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\eta(x) = \eta(0)\cos\xi(x) + \eta'(0)\lambda^{-1/2}\sin\xi(x) + \int_0^x \sin\{\xi(x) - \xi(t)\} R(t)\eta(t)\,dt, \tag{3.2.5}$$

где

$$R(t) = -\frac{1}{4}\frac{q''(t)}{\{\lambda - q(t)\}^{3/2}} - \frac{5}{16}\frac{q'^2(t)}{\{\lambda - q(t)\}^{5/2}}. \tag{3.2.6}$$

Если в этой формуле $I(\lambda) > 0$, то берем $0 < \arg\lambda < \pi$, и если $q(t)$ изменяется от 0 до ∞, то $\arg\{\lambda - q(t)\}$ меняется от $\arg\lambda$ до π.

Лемма 3.2.1. *Пусть $q(x)$ растет монотонно до бесконечности, так что $q'(x) \geqslant 0$. Пусть*

$$q'(x) = O[\{q(x)\}^c] \quad \left(0 < c < \frac{3}{2}\right) \tag{3.2.7}$$

и $q''(x)$ не меняет своего знака. При этих предположениях

$$\int_0^\infty |R(x)|\,dx \tag{3.2.8}$$

сходится равномерно по λ в каждой области, в которой $\{\lambda - q(x)\} \geqslant \delta > 0$ для $0 \leqslant x \leqslant \infty$.

Доказательство. В силу (3.2.7)

$$\int_{X_0}^X \frac{q'^2(x)}{\{q(x)\}^{5/2}}\,dx = O\left[\int_{X_0}^X \frac{q'(x)}{\{q(x)\}^{5/2-c}}\,dx\right] = O[\{q(x)\}^{c-3/2}]_{X_0}^X = O(1),$$

$$\int_{X_0}^X \frac{q''(x)}{\{q(x)\}^{3/2}}\,dt = \left[\frac{q'(x)}{\{q(x)\}^{3/2}}\right]_{X_0}^X + \frac{3}{2}\int_{X_0}^X \frac{q'^2(x)}{\{q(x)\}^{5/2}}\,dx = O(1),$$

что и доказывает лемму.

§ 3. Случай $q(x) \to -\infty$

1. Теорема 3.3.1. *Пусть* $q(x) \leqslant 0$, $q'(x) < 0$, $q(x) \to -\infty$,

$$q'(x) = O\{|q(x)|^c\} \quad (0 < c < {}^3/_2)$$

и $q''(x)$ *не меняет знака. Если*

$$\int^{\infty} |q(x)|^{-1/2}\, dt = \infty,$$

то спектр оператора L непрерывен на всей оси.

Доказательство. Сначала выведем для $\omega(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ асимптотические формулы. Из условий теоремы следует сходимость интеграла (3.2.8).

Пусть $\lambda \geqslant 0$. Из (3.2.5) следует

$$\eta(x) = \eta(0)\cos\xi(x) + \eta'(0)\lambda^{-1/2}\sin\xi(x) + \\ + \int_0^{\infty} \sin\{\xi(x) - \xi(t)\} R(t)\eta(t)\,dt + o(1).$$

Поэтому

$$\omega(x, \lambda) = \\ = \{\lambda - q(x)\}^{-1/4}\{\mu(\lambda)\cos\xi(x) + \nu(\lambda)\sin\xi(x) + o(1)\}, \qquad (3.3.1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \lambda^{1/4}\sin\alpha - \int_0^{\infty} \sin\xi(t) R(t)\{\lambda - y(t)\}^{1/4}\omega(t, \lambda)\,dt, \\ \nu(\lambda) &= -\frac{q'(0)\sin\alpha}{4\lambda^{5/4}} - \frac{\cos\alpha}{\lambda^{1/4}} + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \cos\xi(t) R(t)\{\lambda - q(t)\}^{1/4}\omega(t, \lambda)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.2)$$

Точно так же, если $\theta(x, \lambda)$ — второе решение уравнения (3.2.1), удовлетворяющее начальным условиям $\theta(0, \lambda) = \cos\alpha$; $\theta'(0, \lambda) = \sin\alpha$, то

$$\theta(x, \lambda) = \{\lambda - q(x)\}^{-1/4}\{\mu_1(\lambda)\cos\xi(x) + \\ + \nu_1(\lambda)\sin\xi(x) + o(1)\}, \qquad (3.3.3)$$

где μ_1 и ν_1 получаются из μ, ν заменой $\sin\alpha$, $-\cos\alpha$ и ω на $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и θ.

Так как интегралы в формуле (3.3.2) сходятся равномерно, то $\mu(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ — непрерывные функции.

Дифференцируя (3.3.5), получим

$$\eta'(x) = \{\lambda - q(x)\}^{1/4} [\lambda^{-1/4} \eta'(0) \cos\xi(x) - \eta(0) \sin\xi(x) + \\ + \int_0^x \cos\{\xi(x) - \xi(t)\} R(t) \eta(t)\, dt].$$

Поэтому

$$[\{\lambda - q(x)\}^{1/4} \omega(x, \lambda)]' = \{\lambda - q(x)\}^{1/2} [\nu(\lambda) \cos\xi(x) - \mu(\lambda) \sin\xi(x) + o(1)],$$

и из (3.3.2) и (3.2.7) следует

$$\omega'(x, \lambda) = \\ = \{\lambda - q(x)\}^{1/4} \{\nu(\lambda) \cos\xi(x) - \mu(\lambda) \sin\xi(x) + o(1)\}. \quad (3.3.4)$$

Аналогично

$$\theta'(x, \lambda) = \\ = \{\lambda - q(x)\}^{1/4} \{\nu_1(\lambda) \cos\xi(x) - \mu_1(\lambda) \sin\xi(x) + o(1)\}. \quad (3.3.5)$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to \infty} W\{\omega, \theta\} = \mu(\lambda) \nu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda) \nu(\lambda) = W\{\omega, \theta\}_{x=0} = 1.$$

Поэтому $\mu(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ не могут обратиться в нуль для одного и того же значения λ. Если $\lambda < 0$, то можно выбрать такое X, что $\lambda - q(x) > 0$ для $x \geqslant X$, после чего все предыдущие выводы можно повторить для интервала (x, ∞).

2. Определяя спектр оператора L, предположим вначале, что $\lambda \geqslant 0$. Пусть $b > 0$ — произвольно. Рассмотрим уравнение

$$\omega(b, \lambda) \cos\beta + \omega'(b, \lambda) \sin\beta = 0. \quad (3.3.6)$$

Если $\sin\beta \neq 0$, то при $b \to \infty$ уравнение (3.3.6) можно переписать, пользуясь (3.3.1) и (3.3.4) в виде

$$\nu(\lambda) \cos\xi(b) - \mu(\lambda) \sin\xi(b) = o(1). \quad (3.3.7)$$

При $\sin\beta=0$ получим

$$\mu(\lambda)\cos\xi(b)+\nu(\lambda)\sin\xi(b)=o(1). \qquad (3.3.7')$$

Анализ обоих уравнений одинаков. Рассмотрим второе уравнение. Полагая

$$\frac{\mu(\lambda)}{\{\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\}^{1/2}}=\sin\omega(\lambda), \quad \frac{\nu(\lambda)}{\{\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\}^{1/2}}=\cos\omega(\lambda),$$

перепишем его в виде

$$\sin\{\xi(b,\lambda)+\omega(\lambda)\}=o(1). \qquad (3.3.8)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — последовательные положительные корни уравнения (3.3.8).

Лемма 3.3.1. *При* $b\to\infty$

$$\lambda_2-\lambda_1=o(1).$$

Доказательство. Пусть λ и μ — два значения, для которых

$$\xi(b,\lambda)-\xi(b,\mu)=\int_0^b\sqrt{\lambda-q(t)}\,dt-\int_0^b\sqrt{\mu-q(t)}\,dt=2\pi.$$

Тогда

$$\lambda-\mu=\frac{2\pi}{\int\limits_0^b\frac{dt}{\sqrt{\lambda-q(t)}+\sqrt{\mu-q(t)}}},$$

и так как $\int\limits^{\infty}|q(t)|^{-1/2}\,dt$ расходится, то лемма доказана.

Лемма 3.3.2. *При* $b\to\infty$

$$\lambda_2-\lambda_1=\frac{\pi}{\int\limits_0^b\frac{dt}{2\sqrt{\lambda_1-q(t)}}}+o\left\{\left(\int_0^b\frac{dt}{\sqrt{\lambda_1-q(t)}}\right)^{-1}\right\}. \qquad (3.3.9)$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы и непрерывности функции $\omega(\lambda)$ из уравнения (3.3.8) следует

$$\int_0^b\sqrt{\lambda_2-q(t)}\,dt-\int_0^b\sqrt{\lambda_1-q(t)}\,dt=\pi+o(1).$$

Освобождаясь от иррациональностей в числителе, получим

$$\int_0^b \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2-q(t)}+\sqrt{\lambda_1-q(t)}}\,dt=\pi+o(1). \tag{3.3.10}$$

Далее

$$\int_0^b \frac{dt}{2\sqrt{\lambda_1-q(t)}}-\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{\lambda_2-q(t)}+\sqrt{\lambda_1-q(t)}}=$$

$$=\int_0^b \frac{\sqrt{\lambda_2-q(t)}-\sqrt{\lambda_1-q(t)}}{2\sqrt{\lambda_1-q(t)}\,\{\sqrt{\lambda_2-q(t)}+\sqrt{\lambda_1-q(t)}\}}\,dt=$$

$$=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^b \frac{dt}{2\sqrt{\lambda_1-q(t)}\,\{\sqrt{\lambda_2-q(t)}+\sqrt{\lambda_1-q(t)}\}^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})}\,(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{\lambda_2-q(t)}+\sqrt{\lambda_1-q(t)}}\,.$$

Последнее выражение, в силу (3.3.10), есть $O(1)$. Поэтому (3.3.9) следует из (3.3.10).

Лемма 3.3.3. *При* $b\to\infty$

$$\int_0^b \frac{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\{2\xi(b,\lambda)\}}{\{\lambda-q(t)\}^{1/2}}\,dt=O(1). \tag{3.3.11}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл с синусом. Интеграл с косинусом оценивается аналогично.

Так как

$$\xi(t,\lambda)=\int_0^t \sqrt{\lambda-q(u)}\,du,$$

то

$$\int_0^b \frac{\sin 2\xi(t,\lambda)}{\{\lambda-q(t)\}^{1/2}}\,dt=\int_0^b \frac{\sin 2\xi(t,\lambda)}{\lambda-q(t)}\,d\xi(t,\lambda)=$$

$$=\int_0^{\xi(b,\lambda)} \frac{\sin 2\xi}{\lambda-q(t)}\,d\xi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\dots \tag{3.3.12}$$

Если ξ возрастает, то и t возрастает, а следовательно, $\frac{1}{\lambda - q(t)}$ убывает. Поэтому

$$\int\limits_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2\xi|}{\lambda - q(t)}\, d\xi = \frac{1}{\lambda - q\left(k\frac{\pi}{2} + \theta\frac{\pi}{2}\right)} \int\limits_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} |\sin 2\xi|\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\lambda - q\left(k\frac{\pi}{2} + \theta\frac{\pi}{2}\right)} \quad (0<\theta<1).$$

При возрастании k выражение справа убывает, и лемма следует из разложения (3.3.12), представляющего собой знакопеременную сумму.

Теперь мы в состоянии вычислить функцию $\rho(\lambda)$ для оператора L. Пусть $\lambda > 0$, $\lambda + \Delta > \lambda$. Пользуясь обозначениями § 1 настоящей главы, а также формулой (3.3.9), мы получим

$$\Delta\rho_b(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{1}{\int\limits_0^b \omega^2(t, \lambda_k^{(b)})\, dt} =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{\lambda_{k+1}^{(b)} - \lambda_k^{(b)}}{(\lambda_{k+1}^{(b)} - \lambda_k^{(b)}) \int\limits_0^b \omega^2(t, \lambda_k^{(b)})\, dt}.$$

В силу формулы (3.3.1), расходимости интеграла

$$\int^{\infty} |q(t)|^{-1/2}\, dt$$

и леммы 3.3.3

$$\left(\int\limits_0^b \frac{dt}{2\sqrt{\lambda_k^{(b)} - q(t)}}\right)^{-1} \int\limits_0^b \omega^2(t, \lambda_k^{(b)})\, dt = \mu^2(\lambda_k^{(b)}) + \nu^2(\lambda_k^{(b)}) + o(1).$$

Поэтому при $b \to \infty$, пользуясь формулой (3.3.9), получим

$$\Delta\rho_b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda < \lambda_k^{(b)} \leqslant \lambda+\Delta} \left\{ \frac{1}{\mu^2(\lambda_k^{(b)}) + \nu^2(\lambda_k^{(b)})} + o(1) \right\} (\lambda_{k+1}^{(b)} - \lambda_k^{(b)}) \to$$

$$\to \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \frac{d\lambda}{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)}.$$

Если $\lambda < 0$, то, выбирая X из условия, что $\lambda - q(t) > 0$ для $t \geqslant X$, мы придем к выражению

$$\left(\int_X^b \frac{dt}{\sqrt{\lambda_k^{(b)} - q(t)}} \right)^{-1} \int_0^b \omega^2(t\ \lambda_k^{(b)})\, dt,$$

и так как X фиксировано, а интеграл $\int^{\infty} |q(t)|^{-1/2}$ расходится, то мы получим прежний результат.

3. Теорема 3.3.2. *Если выполнены все условия теоремы* 2.3.1, *за исключением расходимости интеграла*

$$\int^{\infty} |q(t)|^{-1/2}\, dt,$$

то спектр оператора L дискретен и имеет единственную предельную точку на бесконечности.

Доказательство. Если $x \to \infty$, то

$$\xi(x, \lambda) - \xi(x, 0) = \int_0^x [\{\lambda - q(t)\}^{1/2} - \{-q(t)\}^{1/2}]\, dt =$$

$$= \int_0^x \frac{\lambda\, dt}{\{\lambda - q(t)\}^{1/2} + \{-q(t)\}^{1/2}} \to \int_0^{\infty} \frac{\lambda\, dt}{\{\lambda - q(t)\}^{1/2} + \{-q(t)\}^{1/2}} < \infty.$$

Поэтому мнимая часть функции $\xi(x, \lambda)$ ограничена равномерно в каждой конечной части λ-плоскости, в частности в каждом конечном интервале действительной оси.

Из формулы (3.3.1) следует, что интегралы

$$\int_0^\infty \omega^2(t, \lambda)\, dt \tag{3.3.13}$$

равномерно ограничены в каждом конечном интервале изменения действительной переменной λ.

Допустим, что в некотором конечном интервале $(\lambda, \lambda+\Delta)$ спектр содержит бесчисленное множество точек. Очевидно, в этом случае должна существовать последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, так, что число собственных значений $\lambda_r^{(b_k)}$ в интервале $(\lambda, \lambda+\Delta)$ неограниченно растет вместе с k. Поэтому в силу ограниченности интегралов (3.3.13) сумма

$$\sum_{\lambda < \lambda_r^{(b_k)} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\int\limits_0^{b_k} \omega^2(t, \lambda_r^{(b_k)})\, dt}$$

росла бы неограниченно при $k \to \infty$, что противоречит лемме 2.2.1.

§ 4. Случай $q(x) \to +\infty$

Если $q(x)$ монотонно стремится к $+\infty$, то спектр оператора L дискретен и обладает единственной предельной точкой на бесконечности. Исследование этого случая проще всего проводится с помощью метода Штурма.

Лемма 3.4.1. *Если $q(x)$ монотонно стремится к $+\infty$, то число нулей каждого решения $y(x, \lambda)$ уравнения* (3.2.1) *конечно.*

Доказательство. Так как $q(x) \to +\infty$, то для любого фиксированного λ найдется такое x_λ, что для $x \geqslant x_\lambda$ $q(x) - \lambda > 0$. Поэтому в силу фундаментальной теоремы Штурма (см. гл. 1, § 2) $y(x, \lambda)$ имеет не более одного нуля в интервале (x_λ, ∞). В интервале $(0, x_\lambda)$ $y(x, \lambda)$ имеет конечное число нулей в силу той же теоремы Штурма.

Лемма 3.4.2. *Если $q(x)$ монотонно стремится к $+\infty$, то при $b \to +\infty$ число собственных значений граничной задачи* (3.1.15) *остается конечным в каждом конечном интервале.*

Доказательство. При каждом фиксированном b в силу теоремы осцилляции n-я собственная функция имеет n нулей (см. гл. 1, § 2). Поэтому если бы в некотором конечном интервале $(\lambda, \lambda+\Delta)$ число собственных значений возрастало неограниченно при $b \to +\infty$, то существовали бы в этом интервале такие значения λ, для которых число нулей функции $y(x, \lambda)$ также возрастало бы неограниченно, что противоречит лемме 3.4.1.

Теорема 3.4.1. *Если $q(x)$ монотонно стремится к $+\infty$, то спектр дискретен.*

Доказательство. Пусть $(\lambda, \lambda+\Delta)$ — конечный, фиксированный интервал. Пусть $\rho_b(\lambda)$ имеет то же значение, что и в предыдущем параграфе. В силу леммы 3.4.2 число скачков функции $\rho_b(\lambda)$ в интервале $(\lambda, \lambda+\Delta)$ при $b \to \infty$ ограничено. Поэтому каждая предельная функция семейства $\rho_b(\lambda)$ должна также иметь конечное число точек роста.

Теорема 3.4.2. *Если λ_0 есть точка дискретного спектра и $\varphi(x, \lambda_0)$ — соответствующая собственная функция*, то $\varphi(x, \lambda_0) \subset L_2(0, \infty)$.

Доказательство. В обозначениях леммы 2.1.1

$$\int_0^b \left\{ \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \right\}^2 dy =$$

$$= \int_\Delta \varphi^2(x, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \leqslant M, \qquad (3.4.1)$$

где M — фиксированное положительное число. Если $a < b$, то из (3.4.1) следует

$$\int_0^a \left\{ \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \right\}^2 dy \leqslant M.$$

Полагая вначале $b \to \infty$, а затем $a \to \infty$, мы получим

$$\int_0^\infty \left\{ \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, d\rho(\lambda) \right\}^2 dy \leqslant M.$$

Пусть интервал Δ содержит только один скачок функции $\rho(\lambda)$, который мы обозначим через $m(\lambda_0)$. Из последнего неравенства мы получим

$$m(\lambda_0)\varphi^2(x, \lambda_0)\int_0^\infty \varphi^2(y, \lambda_0)\,dy \leqslant M,$$

и так как $\varphi(x, \lambda_0)$ не равно тождественно нулю, то теорема доказана.

§ 5. Дальнейшее изучение нулей собственных функций в случае $q(x) \to +\infty$

1. В предыдущем параграфе мы показали, что в случае монотонного стремления $q(x)$ к бесконечности спектр оператора L дискретен. Однако остались открытыми следующие важные вопросы:

1) Будет ли n-я собственная функция иметь ровно n нулей?

2) Единственна ли предельная функция $\rho(\lambda)$?

В этом параграфе мы дадим утвердительные ответы на оба вопроса. Для этого нам придется, следуя Вейлю, предпринять более глубокое изучение нулей собственных функций $y(x, \lambda)$.

2. Рассмотрим решение $y(x, \lambda)$ уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0$$

с заданными значениями $y(0)$ и $y'(0)$. Так как $q(x) \to +\infty$, то найдется такое x_λ, что для $x > x_\lambda$ $q(x) - \lambda > 0$.

Из фундаментальной теоремы Штурма следует, что для $x > x_\lambda$ функция $y(x, \lambda)$ может иметь не более одного нуля. Пусть для $x > x_1 \geqslant x_\lambda$ она более в нуль не обращается. Рассмотрим различные возможные случаи:

1) Пусть $y(x_1, \lambda) > 0$, $y'(x_1, \lambda) > 0$. Тогда в силу уравнения $y''(x, \lambda) > 0$; следовательно, $y'(x, \lambda)$ возрастает. Поэтому

$$y(x, \lambda) = y(0, \lambda) + \int_0^x y'(x, \lambda)\,dx \to +\infty. \quad (3.5.1)$$

2) Если $y(x_1, \lambda) > 0$, $y'(x_1, \lambda) < 0$, то, так как $y''(x, \lambda) > 0$ $(x \geqslant x_1)$, $y'(x, \lambda)$ возрастает и, стало быть, стремится к ко-

нечному или бесконечному пределу. Этот предел не может быть отрицательным, ибо в этом случае функция $y(x, \lambda)$ стремилась бы к $-\infty$ (см. формулу (3.5.1)). Если предел $y'(x, \lambda)$ положителен, то $y(x, \lambda) \to +\infty$. Наконец, если $y'(x, \lambda) \to 0$, то, в силу возрастания $y'(x, \lambda)$, $y'(x, \lambda) < 0$ для $x \geqslant x_1$. Поэтому $y(x, \lambda)$ убывает и стремится к пределу, который, как легко видеть, равняется нулю. Следовательно, каково бы ни было $x_2 > x_1$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \{q(x) - \lambda\} y \, dx = \int_{x_1}^{x_2} y'' \, dx =$$
$$= y'(x_2, \lambda) - y'(x_1, \lambda) < -y'(x_1, \lambda),$$

т. е. $\{q(x) - \lambda\} y \subset L(x_1, \infty)$. Отсюда следует, что и подавно $y(x, \lambda) \subset L(x_1, \infty)$, и так как $y(x, \lambda) \to 0$, то $v(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$.

Аналогичный результат получаем в случае $y(x_1, \lambda) < 0$.

Итак, для $x > x_\lambda$ $y(x, \lambda)$ имеет не более одного нуля и либо $y(x, \lambda) \to \pm\infty$, либо $y(x, \lambda) \to 0$, $y'(x, \lambda) \to 0$ и $y(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$.

Обозначим через $n(\lambda)$ число нулей функции $y(x, \lambda)$ в интервале $(0, \infty)$.

По теореме сравнения Штурма $n(\lambda)$ является неубывающей функцией от λ. Из той же теоремы сравнения следует, что $n(\lambda) = 0$ для отрицательных достаточно больших (по абсолютной величине) λ и $n(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Так как $n(\lambda)$ изменяется на единицу в точках разрыва, она имеет только конечное число точек роста в каждом конечном интервале. Мы покажем, что эти точки суть собственные значения.

Покажем сначала, что если $y(x, \lambda) \to 0$ и $\mu > \lambda$, то $y(x, \mu)$ имеет нуль, лежащий правее наибольшего нуля $y(x, \lambda)$. Допустим, что $y(x, \lambda) > 0$, $y'(x, \lambda) < 0$ для достаточно больших x. Допустим, что $y(x, \mu) > 0$ для $x \geqslant a$, где a — наибольший нуль $y(x, \lambda)$. Если $y(x, \mu) \to 0$ $(x \to \infty)$, то тождество Грина дает

$$(\mu - \lambda) \int_a^\infty y(x, \lambda) y(x, \mu) \, dx = -y(a, \mu) y'(a, \lambda).$$

Левая часть равенства положительна, а правая отрицательна, так как $y'(a, \lambda) > 0$, ($y(a, \lambda) = 0$ и по условию $y(x, \lambda) > 0$ для $x > a$). Мы получили противоречие. Если $y(x, \mu) \to +\infty$, то $y'(x, \mu)$ также больше нуля для больших x. Поэтому для больших x

$$y(x, \mu)\,y'(x, \lambda) - y(x, \lambda)\,y'(x, \mu) < 0,$$

и тождество Грина снова приводит к противоречию.

Из этих рассуждений, в частности, следует, что каждому интервалу, в котором $n(\lambda)$ постоянна, соответствует не более одного значения λ, для которого $y(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$, и такое значение λ должно быть правым концом этого интервала.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — убывающая последовательность, сходящаяся к λ. Так как $n(\lambda_p) = n(\lambda + 0)$ для достаточно больших p, то можно положить, что

$$n(\lambda_1) = n(\lambda_2) = \ldots = k.$$

Обозначим через $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots, a_k^{(p)}$ нули $y(x, \lambda_p)$. Из соображений перемежаемости нулей следует, что для каждого $m \leqslant k$

$$a_m^{(1)} < a_m^{(2)} < \ldots < a_m^{(p)}.$$

Пусть $q(x) - \lambda_1 \geqslant 0$ для $x \geqslant c$. Тогда $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \ldots, a_{k-1}^{(p)}$ остаются меньше c для всех p, так как $y(x, \lambda_p)$ может иметь не более одного нуля правее c. Поэтому существуют

$$\lim_{p \to \infty} a_m^{(p)} = a_m \leqslant c$$

и a_m суть нули $y(x, \lambda)$. Все эти нули различны. Ибо если бы два нуля совпали, то мы имели бы $y(a_m, \lambda) = 0$, $y'(a_m, \lambda) = 0$, что невозможно ввиду единственности решения дифференциального уравнения.

Обратно, каждый нуль $y(x, \lambda)$ есть предельная точка $a_m^{(p)}$. Таким образом, $y(x, \lambda)$ имеет k или $k-1$ нулей в зависимости от того, стремится ли $a_k^{(p)}$ к конечному пределу или к бесконечности.

Очевидно, что $y'(a_k^{(p)}, \lambda_p)$ имеют один и тот же знак для всех p, например $+$.

Если $a_k^{(p)} \to \infty$, то $a_k^{(p)} > c$ для достаточно больших p. Так как ни одна из функций $y(x, \lambda_p)$ не принадлежит $L_2(0, \infty)$, то необходимо

$$y'(x, \lambda_p) > 0, \quad y(x, \lambda_p) < 0 \qquad (c < x < a_k^{(p)}).$$

Полагая $p \to \infty$, мы получим

$$y'(x, \lambda) > 0, \; y(x, \lambda) < 0 \qquad (x > c).$$

Поэтому $y(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$. Если $a_k^{(p)}$ стремятся к конечному пределу a_k, то

$$y'(x, \lambda) > 0, \quad y(x, \lambda) > 0 \qquad (x > a_k)$$

и $y(x, \lambda)$ не имеет интегрируемого квадрата.

Окончательно: или $n(\lambda) = n(\lambda + 0)$ и $y(x, \lambda)$ не имеет интегрируемого квадрата, или

$$n(\lambda) = n(\lambda + 0) - 1 \text{ и } y(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty).$$

Рассуждая аналогично с возрастающей последовательностью $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, мы покажем, что все $a_m^{(p)}$ убывают и поэтому все стремятся к конечным пределам. Следовательно, $n(\lambda) = n(\lambda - 0)$.

Итак, каждому n соответствует интервал значений λ, в котором $n(\lambda) = n$, причем правые концы этих интервалов обладают тем свойством, что $y(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$.

Пусть λ', λ'' — внутренние точки интервала, в котором $n(\lambda)$ постоянна, и пусть x_0 больше наибольшего нуля $y(x, \lambda)$ или $y'(x, \lambda)$ для $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda''$. При этом предположении $y(x, \lambda)$ либо положительна и возрастает, либо отрицательна и убывает для $x > x_0$, $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda''$. Пусть m есть нижняя граница $|y(x_0, \lambda)|$ для $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda''$, так что $m > 0$. Тогда

$$|y(x, \lambda)| \geqslant m \qquad (x \geqslant x_0, \quad \lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda'').$$

Пусть $y(x, \lambda)$ есть $\omega(x, \lambda)$ из § 1 настоящей главы. Из доказательства теоремы 2.4.2 следует, что функция

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \omega(x, u)\, d\rho(u)$$

имеет интегрируемый квадрат. С другой стороны, для $x \geqslant x_0$

$$\left| \int_{\lambda'}^{\lambda''} \omega(x, u)\, d\rho(u) \right| \geqslant m \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\rho(u) \geqslant m\, [\rho(\lambda''-0)-\rho(\lambda'+0)].$$

Поэтому $\rho(\lambda''-0)=\rho(\lambda'+0)$, т. е. $\rho(\lambda)$ постоянна в открытых интервалах, в которых $n(\lambda)$ постоянна, т. е. положение скачков функции $\rho(\lambda)$ совпадает с положением скачков функции $n(\lambda)$. Отсюда следует, что положение скачков предельных функций $\rho(\lambda)$ определяется однозначно. Чтобы показать единственность функции $\rho(\lambda)$, следует еще показать, что и величина скачков определяется однозначно. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ собственные значения и через $d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$ соответствующие скачки функции $\rho(\lambda)$. Так как при $x \to \infty$ $y(x, \lambda_k) \to 0$, $y'(x, \lambda_k) \to 0$ $(k=1, 2, \ldots)$, то из тождества Грина следует ортогональность собственных функций:

$$\int_0^\infty y(x, \lambda_n)\, y(x, \lambda_m)\, dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

Поэтому, применяя равенство Парсеваля к функции $y(x, \lambda_k)$, мы получим

$$\int_0^\infty y^2(x, \lambda_k)\, dx = d_k \left\{ \int_0^\infty y^2(x, \lambda_k)\, dx \right\}^2.$$

Следовательно,

$$d_k = \left(\int_0^\infty y^2(x, \lambda_k)\, dx \right)^{-1},$$

что и доказывает однозначность d_k.

ГЛАВА IV

ПРИМЕРЫ

§ 1. Классический интеграл Фурье

При $q(x)\equiv 0$ мы получаем классический интеграл Фурье. Рассмотрим полупрямую $(0, \infty)$ с граничным условием в нуле (2.1.4). В силу формул (3.1.8) и (3.1.9)

$$\mu(\lambda)=\sin\alpha, \quad \nu(\lambda)=-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Отрицательного спектра не будет, так как до перехода к пределу его нет. Формулы обращения имеют вид

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\left\{\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x-\cos\alpha\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\right\}dx,$$

$$f(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\left\{\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x-\cos\alpha\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\right\}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\lambda\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}.$$

§ 2. Формулы обращения Ганкеля

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$y''+\left(s^2-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)y=0. \tag{4.2.1}$$

Решениями этого уравнения являются функции $\sqrt{x}\,I_\nu(sx)$ и $\sqrt{x}\,Y_\nu(sx)$, где $I_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода и

$$Y_\nu(t)=\frac{I_\nu(t)\cos\nu\pi-I_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}.$$

Вначале рассмотрим конечный интервал $(0, b)$ и покажем, что спектр дискретен.

Пусть $a > 0$. В конечном интервале (a, b) рассмотрим граничную задачу, определяемую уравнением (4.2.1) и граничными условиями

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \tag{4.2.2}$$

$$v(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0. \tag{4.2.3}$$

Из аналитичности функций Бесселя следует, что при $a \to 0$ и ограниченном λ число нулей любого решения уравнения (4.2.1) остается ограниченным. Из этого обстоятельства, так же как и в § 4 предыдущей главы, заключаем, что спектр остается дискретным при $a = 0$ и собственные функции имеют интегрируемый квадрат.

Если $\nu \geqslant 1$, то единственными решениями с интегрируемым квадратом будут функции $\sqrt{x}\, I_\nu(sx)$. Собственные значения определятся в этом случае из условия (4.2.3), которое запишется в виде

$$I_\nu(sb)\left[\sqrt{b}\cos\beta + \frac{1}{2\sqrt{b}}\sin\beta\right] + \sqrt{b}\; I'_\nu(sb)\sin\beta = 0.$$

Если $\sin\beta = 0$, то мы получим

$$I_\nu(sb) = 0.$$

Если $0 \leqslant \nu < 1$, то все решения уравнения (4.2.1) имеют интегрируемый квадрат. В этом случае, меняя α в условии (4.2.2), вместе с a*), мы будем получать различные разложения. Рассмотрим наиболее простой с точки зрения вычислений случай, когда $\sin\alpha = 0$ и $\sin\beta = 0$. В этом случае решение уравнения (4.2.1), удовлетворяющее условию (4.2.2), запишется в виде

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\pi}{2}\,(ax)^{1/2}\,\{I_\nu(sx)\,Y_\nu(sa) - I_\nu(sa)\,Y_\nu(sx)\}.$$

Подставляя сюда вместо x b и сокращая на $\frac{1}{2}\pi(ab)^{1/2}$, мы получим в силу (4.2.3)

$$I_\nu(sb)\,Y_\nu(sa) - I_\nu(sa)\,Y_\nu(sb) = 0.$$

---

*) См. Титчмарш, стр. 71.

Так как при $a \to 0$ $Y_\nu(sa) \to \infty$, а $I_\nu(sa) \to 0$ $(\nu \neq 0)$ и $I_0(sa) \to 1$, то из последнего равенства мы получим в пределе

$$I_\nu(sb) = 0. \tag{4.2.4}$$

Теперь рассмотрим интервал $(0, \infty)$. Пусть $b > 0$. Пользуясь известной асимптотической формулой $(y \to \infty)$

$$\sqrt{y}\, I_\nu(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\cos\left(y - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right],$$

легко показать, что при $b \to \infty$ для расстояния между последовательными нулями $s_{n+1}^{(b)}$ и $s_n^{(b)}$ уравнения (4.2.4) справедлива оценка

$$s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)} = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right).$$

Поэтому

$$\Delta\rho_b(s) = \sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \frac{1}{\int\limits_0^b x I_\nu^2\left(s_n^{(b)} x\right) dx} =$$

$$= \sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \frac{s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}}{\left(s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}\right)\int\limits_0^b x I_\nu^2\left(s_n^{(b)} x\right) dx} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \left\{\frac{s_n^{(b)}}{\frac{1}{b}\int\limits_0^b \frac{2}{\pi}\cos^2\left(s_n^{(b)} x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dx} + \right.$$

$$\left. + o(1)\right\}\left(s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}\right) =$$

$$= \sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \left\{\frac{s_n^{(b)}}{1 + o(1)} + o(1)\right\}\left(s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}\right) \to \int\limits_s^{s+\Delta} s\, ds.$$

Поэтому формулы обращения имеют вид:

$$E(s)=\int_0^\infty f(x)\sqrt{x}\,I_\nu(sx)\,dx,$$

$$f(x)=\int_0^\infty sE(s)\sqrt{x}\,I_\nu(sx)\,ds.$$

§ 3. Другие разложения, содержащие бесселевы функции

1. Пусть $q(x)=-x$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$. Из общей теории нам известно (гл. III, § 3), что в этом случае спектр будет непрерывно заполнять всю ось. Вычислим $\rho(\lambda)$. Рассмотрим уравнение

$$y''+(\lambda+x)y=0. \tag{4.3.1}$$

Пусть в граничном условии (4.2.2) $\alpha=0$. Решения уравнения (4.3.1) суть

$$(x+\lambda)^{1/2}I_{1/3}\left\{\frac{2}{3}(x+\lambda)^{3/2}\right\};\quad (x+\lambda)^{1/2}Y_{1/3}\left\{\frac{2}{3}(x+\lambda)^{3/2}\right\}.$$

Определитель Вронского для этих решений равен $\frac{3}{\pi}$. Полагая для сокращения

$$X=\frac{2}{3}(x+\lambda)^{3/2},\quad Z=\frac{2}{3}\lambda^{3/2},$$

получим

$$\omega(x,\lambda)=\frac{\pi}{3}\lambda^{1/2}(x+\lambda)^{1/2}\{I_{1/3}(X)\,Y_{1/3}(Z)-Y_{1/3}(X)\,I_{1/3}(Z)\}.$$

В силу известных асимптотических формул

$$\omega(x,\lambda)=\frac{\pi}{3}\lambda^{1/2}(x+\lambda)^{1/2}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi X}}\left[\cos\left(X-\frac{\pi}{12}\right)Y_{1/3}(Z)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin\left(X-\frac{\pi}{12}\right)Y_{1/3}(Z)\right]+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\lambda^{1/2}(x+\lambda)^{1/2}\{\mu(\lambda)\cos X+\nu(\lambda)\sin X+o(1)\},$$

где

$$\mu(\lambda)=\cos\frac{\pi}{12}Y_{1/3}(Z)-\sin\frac{\pi}{12}I_{1/3}(Z),$$

$$\nu(\lambda)=\sin\frac{\pi}{12}Y_{1/3}(Z)+\cos\frac{\pi}{12}I_{1/3}(Z).$$

Поэтому, поступая так же, как в § 1 гл. III, мы получим

$$\Delta\rho(\lambda)=\frac{3}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{\lambda+\Delta}\frac{d\lambda}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}=\frac{3}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{\lambda+\Delta}\frac{d\lambda}{\lambda\left\{I^2_{1/3}(Z)+Y^2_{1/3}(Z)\right\}}.$$

2. Пусть $q(x)=x$. Из общей теории следует, что спектр дискретен. Пусть $\alpha=0$. Нам следует найти решения с интегрируемым квадратом уравнения

$$y''+(\lambda-x)y=0, \tag{4.3.2}$$

удовлетворяющие граничному условию $y(0)=0$. Решениями уравнения (4.3.2) являются функции

$$\varphi_0(x,\lambda)=(x-\lambda)^{1/2}I_{1/3}\left\{\frac{2}{3}(x-\lambda)^{3/2}\right\};$$

$$\psi_0(x,\lambda)=(x-\lambda)^{1/2}K_{1/3}\left\{\frac{2}{3}(x-\lambda)^{3/2}\right\},$$

где

$$K_p(Z)=\frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}p\pi i}H_p^{(1)}(iz)$$

и $(x-\lambda)^{1/2}>0$ для действительных λ и $x>\lambda$.

Из граничного условия легко следует

$$\omega(x,\lambda)=\frac{\varphi_0(x,\lambda)\psi_0(0,\lambda)-\psi_0(x,\lambda)\varphi_0(0,\lambda)}{\varphi_0(0,\lambda)\psi_0'(0,\lambda)-\psi_0(0,\lambda)\varphi_0'(0,\lambda)}.$$

Так как $\varphi_0(x,\lambda)$ не имеет интегрируемого квадрата, а $\psi_0(x,\lambda)$ имеет, то собственные числа определяются уравнением

$$\psi_0(0,\lambda)=0.$$

§ 4. Полиномы Эрмита

Пусть $q(x) = x^2$ ($-\infty \leqslant x \leqslant \infty$). Каждую функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций. Поэтому можно рассматривать полуось и граничные условия

$$y(0) = 0, \text{ или } y'(0) = 0. \tag{4.4.1}$$

Таким образом, нам следует найти решения уравнения

$$y'' + (\lambda - x^2)\, y = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty), \tag{4.4.2}$$

удовлетворяющие одному из условий (4.4.1) и имеющие интегрируемый квадрат. Но известно *), что единственными решениями с интегрируемым квадратом уравнения (3.4.2) являются ортогональные функции Эрмита.

§ 5. «Атом водорода»

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \left(2E + \frac{2}{r}\right) R = 0$$

$$(0 < r \leqslant \infty), \tag{4.5.1}$$

где l — целое положительное число или нуль.

В квантовой механике к этому уравнению сводится изучение уровней энергии атома водорода. Подстановка $R = \frac{1}{r} y$ приводит уравнение (4.5.1) к виду

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \left\{2E + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\} y = 0. \tag{4.5.2}$$

Так же, как и в случае уравнения Бесселя, можно показать, что в конечном интервале $(0, b)$ спектр дискретен.

---

*) См., например, Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, стр. 310.

Рассмотрим бесконечный интервал $(0, \infty)$. Покажем, что для отрицательных E спектр остается дискретным. Пусть $E < 0$. Очевидно, что существует такое значение $r = r_E$, что вне интервала $(0, r_E)$

$$2E + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} < 0.$$

Поэтому в интервале (r_E, ∞) любое решение уравнения (4.5.2) имеет не более одного нуля. В интервале $(0, r_E)$ число нулей конечно, что следует из аналитичности. Из конечности числа нулей любого решения для $E < 0$ следует дискретность спектра.

Для того чтобы определить собственные функции уравнения (4.5.1), соответствующие отрицательным собственным значениям, следует найти решения этого уравнения, удовлетворяющие условию

$$\int_0^\infty r^2 R^2 dr < \infty.$$

Но известно *), что этими решениями будут обобщенные функции Лагерра.

Рассмотрим теперь положительные значения параметра E. Положим

$$\sqrt{2E} = s.$$

Как известно **), для ограниченного в нуле решения уравнения (4.5.2) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2s}}}{\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s}\right)\right|} \cdot \frac{1}{s} \cos\left[sr + \frac{1}{s}\ln 2sr - \right.$$
$$\left. -(l+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\right] + o(1), \quad (4.5.3)$$

*) См., например, Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, стр. 310—312.

**) В. А. Фок, Начала квантовой механики, Ленинград (1932), стр. 155, или Ландау и Лифшиц, Квантовая механика ч. I (1948), Математические дополнения, § *d*.

где

$$\alpha = \arg \Gamma\left(l + 1 + \frac{i}{s}\right).$$

Из (4.5.3) легко следует, что при $b \to \infty$ расстояние между последовательными нулями функции $y(b, s)$ — обозначим их через s_1 и s_2 — стремится к нулю. Пользуясь этим обстоятельством, можно получить более точную оценку для $s_2 - s_1$:

$$(s_2 - s_1)\, b + \frac{1}{s_2} \ln 2s_2 b - \frac{1}{s_1} \ln 2s_1 b = \pi + o(1), \quad (4.5.4)$$

$$s_2 - s_1 = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{\ln b}{b}\right). \quad (4.5.5)$$

Подставляя (4.5.5) в (4.5.4), мы получим

$$(s_2 - s_1)\, b + \ln b \left(\frac{s_2 - s_1}{s_1 s_2}\right) =$$

$$= (s_2 - s_1)\, b + \ln b \frac{\pi}{s_1 s_2 b} + o\left(\frac{\ln^2 b}{b}\right) = \pi + o(1).$$

Отсюда окончательная оценка для $s_2 - s_1$:

$$s_2 - s_1 = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right). \quad (4.5.6)$$

Нам понадобится еще следующая оценка $(b \to \infty)$:

$$\int_a^b \cos\left(2sr + \frac{2}{s} \ln 2sr + 2\alpha\right) dr = O(1). \quad (4.5.7)$$

Пусть $a > 0$ — произвольно. Имеем

$$\int_a^b \cos\left(2sr + \frac{2}{s} \ln 2sr + 2\alpha\right) dr =$$

$$= \int_a^b \cos 2sr \cos\left(\frac{2}{s} \ln 2sr + 2\alpha\right) dr -$$

$$- \int_a^b \sin 2sr \sin\left(\frac{2}{s} \ln 2sr + 2\alpha\right) dr.$$

Оба интеграла справа оцениваются аналогично. Рассмотрим, например, первый интеграл. Интегрируя дважды по частям, получим

$$\int_a^b \cos 2sr \cos\left(\frac{2}{s}\ln 2sr + 2\alpha\right)dr =$$

$$= O(1) + \frac{1}{2s^3}\int_a^b \cos 2sr\left\{-\frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{2}{s}\ln 2sr + \alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2sr^2}\cos\left(\frac{2}{s}\ln 2sr + \alpha\right)\right\}dr = O(1).$$

Из (4.5.6) и (4.5.7) следует

$$\Delta s_b(s) = \sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \frac{1}{\int\limits_0^b y^2(r, s_n^{(b)})\,dr} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \left(s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}\right)\left\{s_n^{(b)}\right\}^2 e^{\frac{\pi}{s_n^{(b)}}}\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s_n^{(b)}}\right)\right|^2 \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\frac{1}{b}\int\limits_0^b \cos^2\left[s_n^{(b)} r + \frac{1}{s_n^{(b)}}\ln 2s_n^{(b)} r - (l+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\right]dr} + o(1)\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{s < s_n^{(b)} \leqslant s+\Delta} \left\{s_n^{(b)}\right\}^2 e^{\frac{\pi}{s_n^{(b)}}}\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s_n^{(b)}}\right)\right|^2\{1 + o(1)\} \times$$

$$\times\left\{s_{n+1}^{(b)} - s_n^{(b)}\right\} \to \frac{2}{\pi}\int_s^{s+\Delta} s^2 e^{\frac{\pi}{s}}\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s}\right)\right|^2 ds.$$

Пользуясь известными свойствами Г-функций

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

получим

$$\left|\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s}\right)\right|^2=\Gamma\left(l+1+\frac{i}{s}\right)\Gamma\left(l+1-\frac{i}{s}\right)=$$

$$=\left(l+\frac{i}{s}\right)\ldots\left(1+\frac{i}{s}\right)\frac{i}{s}\left(l-\frac{i}{s}\right)\ldots\left(1-\frac{i}{s}\right)\Gamma\left(\frac{i}{s}\right)\Gamma\left(1-\frac{i}{s}\right)=$$

$$=\left(l^2+\frac{1}{s^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\frac{1}{s}\,\frac{\pi}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{s}}=$$

$$=\frac{\pi}{s}\,\frac{2}{e^{\frac{\pi}{s}}-e^{-\frac{\pi}{s}}}\prod_{n=1}^{l}\left(n^2+\frac{1}{s^2}\right).$$

Поэтому

$$\Delta\rho(s)=\int\limits_{s}^{s+\Delta}\frac{4s\prod\limits_{n=1}^{l}\left(n^2+\frac{1}{s^2}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2\pi}{s}}\right)}\,ds.$$

ГЛАВА V

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$ *)

В настоящей главе доказывается, что если $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$ и $f(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, то функция $f(x)$ разлагается в обобщенный интеграл Фурье в тех же точках, в которых она разлагается в обычный интеграл Фурье.

Эта теорема при несколько менее ограничительном предположении $q(x) \subset L_1(0, \infty)$ принадлежит Стону **). Мы приведем здесь новое доказательство, аналогичное доказательству соответствующей теоремы из теории рядов Фурье ***)

§ 1. Уточнение теоремы разложения для случая $q(x) \subset L_{12}(0, \infty), f(x) \subset L_{12}(0, \infty), \{f'' - q(x) f\} \subset L_{12}(0, \infty)$

Теорема 5.1.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$,
2) $f(x) \subset L_{12}(0, \infty)$,
3) $f(x)$ *удовлетворяет граничному условию*

$$f(0) \sin \alpha + f'(0) \cos \alpha = 0, \tag{5.1.1}$$

---

*) Это обозначение имеет следующий смысл: $q(x) \subset L_1(0, \infty)$ и $q(x) \subset L_2(0, \infty)$.

**) Stone, Certain integrals analoguous to Fourier integrals, Math. Zeitschr., 28 (1928), 654—676.

***) См. гл. I, § 4.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\begin{vmatrix} f(x) & \omega(x,\lambda) \\ f'(x) & \omega'_x(x,\lambda)\end{vmatrix}=0 \quad (\lambda>0)$,

5) $\{f''-q(x)f\}\subset L_{12}(0,\infty)$.

При этих предположениях

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\omega(x,\lambda_\nu)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{\infty}\omega(x,\lambda)E(\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\{\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\}}, \quad (5.1.2)$$

где положено

$$E(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\,\omega(x,\lambda)\,dx \quad (\lambda>0);$$
$$E(\lambda)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^{A}f(x)\,\omega(x,\lambda)\,dx \quad (\lambda\geqslant 0)^{*}),$$
$$c_\nu=\frac{1}{\alpha_\nu^2}\int_0^{\infty}f(x)\,\omega(x,\lambda_\nu)\,dx;$$
$$\alpha_\nu^2=\int_0^{\infty}\omega^2(x,\lambda_\nu)\,dx$$

(λ_ν при $\nu=1,2,\ldots$ — *отрицательные собственные значения*),

$$\omega(x,\lambda_0)=\omega(x,0),\quad c_0=\lim_{\rho',\rho\to 0}\int_{-\rho'}^{\rho}E(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Доказательство. Пусть $\rho'>0$, $\rho>0$ фиксированы. В интервале $(-\infty, -\rho')$ существует только конечное число собственных значений. Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а соответствующие собственные функции через $\omega(x,\lambda_1)$, $\omega(x,\lambda_2), \ldots, \omega(x,\lambda_n)$.

*) $f(x)\,\omega(x,0)$ может не быть абсолютно интегрируемой функцией, так как $\omega(x,0)$, вообще говоря, не ограничена.

Для произвольного $N > 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{N} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,d\rho(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \left\{ \int_0^\infty f(x)\,\omega(x,\lambda_\nu)\,dx \right\} \omega(x,\lambda_\nu) +$$

$$+ \int_{-\rho'}^{\rho} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,d\rho(\lambda) + \int_{\rho}^{N} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Здесь d_ν — скачки $\rho(\lambda)$ в точках λ_ν.

Мы теперь докажем абсолютную сходимость интеграла

$$\int_{\rho}^{\infty} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

После этого настоящая теорема будет следовать непосредственно из теоремы 2.1.2.

В силу теоремы 3.1.1

$$\int_{\rho}^{N} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,d\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{N} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda)\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\,\{\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\}}.$$

Применяя тождество Грина (что возможно в силу условий 3) и 4)), мы получим

$$\int_0^\infty \{f'' - q(x)f\}\,\omega(x,\lambda)\,dx =$$

$$= -\lambda \int_0^\infty f(x)\,\omega(x,\lambda)\,dx = -\lambda E(\lambda).$$

Так как по условию $\{f'' - q(x)f\} \subset L_2(0,\infty)$, то из равенства Парсеваля следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) < \infty.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, мы получим

$$\int^{\infty} |E(\lambda)|\, d\rho(\lambda) = \int^{\infty} |\lambda E(\lambda)| \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int^{\infty} \lambda^2 E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\sin\alpha \neq 0$, то $\frac{1}{\mu^2+\nu^2} \sim \frac{1}{\sin^2\alpha}$ и поэтому

$$\int^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} = \int^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{5/2}\{\mu^2+\nu^2\}} < \infty. \tag{5.1.3}$$

Если $\sin\alpha = 0$, то $\frac{1}{\mu^2+\nu^2} \sim \frac{1}{\lambda}$, и неравенство (5. 1. 3) остается в силе. Итак,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \left\{\int_0^{\infty} f(x)\,\omega(x, \lambda_\nu)\, dx\right\} \omega(x, \lambda_\nu) +$$

$$+ \int_{-\rho'}^{\rho} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) + \int_{\rho}^{\infty} E(\lambda)\,\omega(x,\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\{\mu^2+\nu^2\}}.$$

Полагая ρ', $\rho \to 0$, мы получим разложение (5.1.2). Нам остается показать, что $d_\nu = (\alpha_\nu^2)^{-1}$. Для этого нам придется сослаться на ортогональность разложения в обобщенный интеграл Фурье, которая будет доказана в следующей главе. Пользуясь ортогональностью и применяя равенство Парсеваля к функции $\omega(x, \lambda_\nu)$, мы получим

$$\int_0^{\infty} \omega^2(x, \lambda_\nu)\, dx = \alpha_\nu^2 = d_\nu \left\{\int_0^{\infty} \omega^2(x, \lambda_\nu)\, dx\right\}^2 = d_\nu \alpha_\nu^4.$$

Отсюда

$$d_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu^2}.$$

§ 2. Уточнение асимптотических формул для $\omega(x, \lambda)$, $\mu(\lambda)$, $\nu(\lambda)$

Для уточнения теоремы разложения в обобщенный интеграл Фурье нам понадобятся более точные асимптотические формулы для $\omega(x, \lambda)$, $\mu(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$.

Если в формулу (3. 1. 5) вместо $\omega(t, \lambda)$ вставить значение из той же формулы, то мы получим

$$\omega(x, \lambda) = \sin\alpha\cos x - \cos\alpha\frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)\left[\sin\alpha\cos st - \cos\alpha\frac{\sin st}{s} + \frac{1}{s}\int_0^t \sin s(t-\tau)\,q(\tau)\,\omega(\tau, \lambda)\,d\tau\right]dt =$$

$$= \sin\alpha\cos x - \cos\alpha\frac{\sin sx}{s} + \frac{\sin\alpha}{s}\int_0^x \sin s(x-t)\cos st\, q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \cos\alpha\frac{\sin sx}{s} + \frac{\sin\alpha\sin sx}{s}\int_0^x q(t)\cos^2 st\,dt - \frac{\sin\alpha\cos sx}{s}\int_0^x q(t)\sin st\cos st\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \sin\alpha\cos sx - \cos\alpha\frac{\sin sx}{s} + \sin\alpha\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(t)\,dt + \sin\alpha\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(t)\cos 2st\,dt - \sin\alpha\frac{\cos sx}{2s}\int_0^x q(t)\sin 2st\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (5.\ 2.\ 1)$$

Лемма 5.2.1. *Если* $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, *то*

$$\omega(x, \lambda) = \sin\alpha\cos sx -$$

$$-\frac{\sin sx}{s}\left[\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}\int_0^x q(t)\,dt\right] + F(s,x), \qquad (5.2.2)$$

причем при фиксированном $\rho > 0$

$$\int_\rho^\infty |F(s, x)|\,ds < \infty$$

равномерно по x.

Доказательство. Так как $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, то из неравенства Бесселя (для обычных интегралов Фурье) и неравенства Коши-Буняковского следует, что функции (от s)

$$\frac{\sin sx}{s}\int_0^x q(t)\cos 2st\,dt, \quad \frac{\cos sx}{s}\int_0^x q(t)\sin 2st\,dt$$

на бесконечности абсолютно интегрируемы.

Поэтому настоящая лемма следует непосредственно из (5. 2. 1).

Лемма 5. 2. 2. *Пусть* $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$. *Если* $\sin\alpha \neq 0$, *то*

$$\frac{1}{\{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)\}^{1/2}} = \frac{1}{|\sin\alpha|}[1 + h(s)],$$

где $h(s) \to 0$ *при* $s \to \infty$ *и*

$$\int^\infty |h(s)|\,ds < \infty.$$

Если $\sin\alpha = 0$, *то*

$$\frac{1}{\{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)\}^{1/2}} = \frac{1}{s}[1 + h_1(s)],$$

где $h_1(s)$ *обладает теми же свойствами, что и* $h(s)$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $\sin\alpha \neq 0$. Подставляя в формулу (3.1.8) вместо $\omega(t, \lambda)$ значение из формулы (3.1.5), мы получим

$$\mu(\lambda)=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{2s}\int_0^\infty q(t)\sin 2st\,dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Из неравенства Бесселя (для обычных интегралов Фурье) и неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\frac{1}{s}\int_0^\infty q(t)\sin 2st\,dt\subset L(0,\infty).$$

Далее из формулы (3.1.9) следует

$$\nu^2(\lambda)=O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Поэтому, разлагая $\{\mu^2+\nu^2\}^{-1/2}$ по формуле бинома Ньютона, мы докажем наше утверждение.

Если $\sin\alpha=0$, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\cos\alpha=1$. Поэтому

$$\mu(\lambda)=-\frac{1}{s}\int_0^\infty \sin st\,q(t)\,\omega(t,\lambda)\,dt=O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

$$\nu(\lambda)=\frac{1}{s}\left[1+\frac{1}{2s}\int_0^\infty q(t)\sin 2st\,dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right].$$

Снова разлагая $\{\mu^2+\nu^2\}^{-1/2}$ по биному Ньютона, мы получим

$$\{\mu^2+\nu^2\}^{-1/2}=\frac{1}{s}[1+h_1(s)],$$

причем $h_1(s)\subset L(a,\infty)$, $(a>0)$, $h_1(s)\to 0$ при $s\to\infty$.

Лемма 5.2.3. *Если* $q(t)\subset L_{12}(0,\infty)$, *то*

$$\frac{\omega(x,\lambda)}{\{\mu^2+\nu^2\}^{1/2}}=\cos sx+\beta_1(x)\frac{\sin sx}{s}+F_1(s,x)\quad(\sin\alpha\neq 0),\quad(5.2.3)$$

$$\frac{\omega(x,\lambda)}{\{\mu^2+\nu^2\}^{1/2}}=\sin sx+\beta_2(x)\frac{\cos sx}{s}+F_2(s,x)\quad(\sin\alpha=0),\quad(5,2,4)$$

причем $\beta_i(x)$ $(i=1,\ 2)$ равномерно ограничены $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ и при фиксированном $\rho>0$ равномерно по x

$$\int\limits_{\rho}^{\infty}|F_i(s,\ x)|\,ds<\infty \qquad (i=1,2). \tag{5.2.5}$$

Доказательство. Если $\sin\alpha\neq 0$, то настоящая лемма следует непосредственно из предыдущей леммы и формулы (5.2.2). Пусть

$$\sin\alpha=0,\quad \cos\alpha=-1.$$

Нам следует получить формулу, заменяющую формулу (5.2.2). Из (5.2.1) следует

$$\omega(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s^2}\int\limits_0^x \sin s(x-t)\sin st\,q(t)\,dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left[\sin sx+\frac{\sin sx}{s}\int\limits_0^x q(t)\sin st\cos st\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos sx}{s}\int\limits_0^x q(t)\sin^2 st\,dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{s}\left[\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int\limits_0^x q(t)\sin 2st\,dt-\frac{\cos sx}{2s}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos sx}{2s}\int\limits_0^x q(t)\cos 2st\,dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right].$$

Из последней формулы и предыдущей леммы следует (5.2.4).

Лемма 5.2.4. *Для каждого фиксированного $\rho>0$ существует постоянная величина M_ρ, так что для всех*

$N > \rho$ и $0 \leqslant x,\ t \leqslant \infty$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\rho}^{N} \left[\frac{\omega(x, \lambda)\,\omega(t, \lambda)}{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)} - \cos\sqrt{\lambda}\,x \cos\sqrt{\lambda}\,t \right] \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right| =$$

$$= |\Phi_{\rho, N}(x, t)| \leqslant M_\rho \qquad (\sin\alpha \neq 0), \qquad (5.2.6)$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\rho}^{N} \left[\frac{\omega(x, \lambda)\,\omega(t, \lambda)}{\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)} - \sin\sqrt{\lambda}\,x \sin\sqrt{\lambda}\,t \right] \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right| =$$

$$= |\Phi_{\rho, N}(x, t)| < M_\rho \qquad (\sin\alpha = 0). \qquad (5.2.7)$$

Доказательство. Пусть $\sin\alpha \neq 0$. В силу предыдущей леммы

$$\frac{\omega(x, \lambda)\,\omega(t, \lambda)}{\mu^2 + \nu^2} - \cos\sqrt{\lambda}\,x \cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{\beta_1(x) + \beta_1(t)}{2} \frac{\sin s(x + t)}{s} +$$

$$+ \frac{\beta_1(x) - \beta_1(t)}{2} \frac{\sin s(x - t)}{s} + F(x, t, s),$$

причем при фиксированном $\rho > 0$ равномерно по $x,\ t,\ N$ $(0 \leqslant x,\ t \leqslant \infty)$

$$\int\limits_{\rho}^{\infty} |F(x, t, s)|\, ds < \infty.$$

С другой стороны, $\beta_1(x)$ и интеграл

$$\int\limits_{\rho}^{N} \frac{\sin s(x \pm t)}{s}\, ds$$

также равномерно ограничены, и лемма доказана. Если $\sin\alpha = 0$, то для доказательства леммы воспользуемся формулой (5.2.4).

§ 3. Уточнение теоремы разложения

Лемма 5.3.1. *Если* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 5.1.1, *то*

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{N \to \infty} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi_{\rho, N}(x, t) f(t)\, dt = -\sum_{\nu = 0}^{\infty} c_\nu \omega(x, \lambda_\nu). \qquad (5.3.1)$$

Доказательство. Пусть для определенности $\sin\alpha \neq 0$. Как и прежде, через ρ, ρ', N обозначим положительные числа. Имеем

$$\int_{-\infty}^{N} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \omega(x, \lambda_\nu) + \int_{-\rho'}^{\rho} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{N} \omega(x, \lambda) \left\{ \int_{0}^{\infty} f(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\{\mu^2 + \nu^2\}}. \quad (5.3.2)$$

Далее положим

$$C(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt$$

и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{N} C(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\rho} C(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{N} \cos\sqrt{\lambda}\, x \left\{ \int_{0}^{\infty} f(t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5.3.3)$$

Вычитая из (5.3.2) (5.3.3), мы получим

$$\int_{-\infty}^{N} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{N} C(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \omega(x, \lambda_\nu) + \int_{-\rho'}^{\rho} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \Phi_{\rho, N}(x, t) f(t)\,dt - \int_{0}^{\rho} C(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5.3.4)$$

Полагая $N \to \infty$, мы получим в силу теоремы 5.1.1 слева нуль. Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \omega(x, \lambda_\nu) + \int_{-\rho'}^{\rho} E(\lambda)\, \omega(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) +$$
$$+ \int_0^{\rho} C(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \lim_{N \to \infty} \int_0^{\infty} \Phi_{\rho, N}(x, t) f(t)\, dt = 0.$$

Полагая теперь ρ', $\rho \to 0$, мы получим (5.3.1).

Если $\sin \alpha = 0$, то следует воспользоваться формулой (5.2.7).

Теорема 5.3.1. *Пусть*

$$q(x) \subset L_{12}(0, \infty), \quad f(x) \subset L_{12}(0, \infty).$$

При этих предположениях

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{N} E(\lambda)\, \omega(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_0^{N} C(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right\} = 0$$

равномерно в каждом конечном интервале. В частности, разложение функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье сходится или расходится в точке x_0 одновременно с разложением в обычный интеграл Фурье.

Доказательство. Равенство (5.3.4) справедливо при одном лишь условии *) $f(x) \subset L_2(0, \infty)$.

Так как $f(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, то, каково бы ни было $\eta > 0$, можно указать функцию $f_\eta(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 5.1.1, а также неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &\left(\int_0^{\infty} |f(x) - f_\eta(x)|^2\, dx \right)^{1/2} < \eta; \\ &\int_0^{\infty} |f(x) - f_\eta(x)|\, dx < \eta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.5)$$

---

*) При этом

$$E(\lambda) = \underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^{N} f(x)\, \omega(x, \lambda)\, dx, \quad C(\lambda) = \underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^{N} f(x) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, dx.$$

Положим

$$E_\eta(\lambda) = \int_0^\infty f_\eta(x)\,\omega(x, \lambda)\,dx,$$

$$C_\eta(\lambda) = \int_0^\infty f_\eta(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx,$$

$$c_\nu^{(\eta)} = \frac{1}{\alpha_\nu^2}\int_0^\infty f_\eta(x)\,\omega(x, \lambda_\nu)\,dx$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Из равенства (5.3.4) следует

$$\int_{-\infty}^{N} E(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_0^N C(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_\nu - c_\nu^{(\eta)}\right)\omega(x, \lambda_\nu) + \int_{-\rho'}^{\rho}\{E(\lambda) - E_\eta(\lambda)\}\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_0^\infty \Phi_{\rho, N}(x, t)\,\{f(t) - f_\eta(t)\}\,dt -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\rho \{C(\lambda) - C_\eta(\lambda)\}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^{(\eta)}\,\omega(x, \lambda_\nu) +$$

$$+ \int_{-\rho'}^{\rho} E_\eta(\lambda)\,\omega(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) +$$

$$+ \int_0^\infty \Phi_{\rho, N}(x, t)\,f_\eta(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\rho C_\eta(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

В силу (5.2.6) и второго неравенства (5.3.5)

$$\left| \int_0^\infty \Phi_{\rho, N}(x, t) \{f(t) - f_\eta(t)\} \, dt \right| < \eta M_\rho. \tag{5.3.6}$$

Каково бы ни было положительное число ε, последнее выражение при фиксированном ρ и достаточно малом η будет меньше $\frac{\varepsilon}{4}$.

Далее, в силу леммы 4.3.1 при фиксированном η можно взять N столь большим, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^{(\eta)} \omega(x, \lambda_\nu) + \int_{-\rho'}^{\rho} E_\eta(\lambda) \omega(x, \lambda) \, d\rho(\lambda) + \right.$$

$$+ \int_0^\infty \Phi_{\rho, N}(x, t) f_\eta(t) \, dt -$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\rho C_\eta(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.3.7}$$

В силу первого из неравенств (5.3.5)

$$|c_\nu - c_\nu^{(\eta)}| \leqslant \int_0^\infty |f(x) - f_\eta(x)| \, |\omega(x, \lambda_\nu)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \eta \left(\int_0^\infty \omega^2(x, \lambda_\nu) \, dx \right)^{1/2}.$$

Поэтому при достаточно малом η и x, лежащем в конечном интервале,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu - c_\nu^{(\eta)}| \, |\omega(x, \lambda_\nu)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.3.8}$$

Наконец, $E_\eta(\lambda)$ сходится в среднем квадратичном к $E(\lambda)$, а $C_\eta(\lambda)$ — к $C(\lambda)$. Поэтому при конечных ρ', ρ и при x, лежащем в конечном интервале,

$$\Bigl| \int_{-\rho'}^{\rho} \{E(\lambda) - E_\eta(\lambda)\}\, \omega(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) -$$
$$- \int_{0}^{\rho} \{C(\lambda) - C_\eta(\lambda)\} \cos \sqrt{\lambda}\, x \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Bigr| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.3.9)$$

Из (5.3.6) — (5.3.9) и произвольности ε следует утверждение теоремы.

ГЛАВА VI

РЕЗОЛЬВЕНТА

§ 1. Круг и точка Вейля

1. В этой главе мы попрежнему рассматриваем интервал $(0, \infty)$ и функцию $q(x)$, непрерывную в каждом конечном интервале.

Пусть $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \tag{6.1.1}$$

и $G(x)$ удовлетворяет тому же уравнению с λ' вместо λ. Если b — фиксированное число, то в силу известного тождества

$$(\lambda' - \lambda) \int_0^b F(x) G(x) dx =$$

$$= \int_0^b [F(x)\{q(x)G(x) - G''(x)\} - G(x)\{q(x)F(x) - F''(x)\}] dx =$$

$$= - \int_0^b \{F(x) G''(x) - G(x) F''(x)\} dx =$$

$$= W_0\{F, G\} - W_b\{F, G\},$$

где положено

$$W_x\{F, G\} = \begin{vmatrix} F(x) & G(x) \\ F'(x) & G'(x) \end{vmatrix}.$$

Если, в частности, $\lambda = u + iv$, $\lambda' = u - iv$, $G(x) = \bar{F}(x)$, то в силу действительности $q(x)$

$$2v \int_0^b |F(x)|^2 dx = iW_0\{F, \bar{F}\} - iW_b\{F, \bar{F}\}. \qquad (6.1.2)$$

Обозначим теперь через $\varphi(x) = \varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x) = \theta(x, \lambda)$ решения уравнения (6.1.1) с начальными условиями (α — действительное число)

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= \sin\alpha, & \varphi'(0) &= -\cos\alpha, \\ \theta(0) &= \cos\alpha, & \theta'(0) &= \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.3)$$

Так как в уравнении (6.1.1) член с первой производной отсутствует, то вронскиан постоянен и, следовательно,

$$W_x\{\varphi, \theta\} = W_0\{\varphi, \theta\} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Общее решение уравнения (6.1.1) можно представить (с точностью до постоянного множителя) в виде $\theta(x) + l\varphi(x)$.

Рассмотрим те решения, которые в точке $x = b$ удовлетворяют условию

$$\{\theta(b) + l\varphi(b)\}\cos\beta + \{\theta'(b) + l\varphi'(b)\}\sin\beta = 0$$

с действительным β. Из этого условия определим l:

$$l = -\frac{\theta(b)\operatorname{ctg}\beta + \theta'(b)}{\varphi(b)\operatorname{ctg}\beta + \varphi'(b)}.$$

Если b фиксировано и $\operatorname{ctg}\beta$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, то l описывает в комплексной плоскости окружность C_b. Заменим $\operatorname{ctg}\beta$ на комплексную переменную z и положим

$$l = l(\lambda, z) = -\frac{\theta(b)z + \theta'(b)}{\varphi(b)z + \varphi'(b)}. \qquad (6.1.4)$$

Точке $l = \infty$ соответствует $z = -\dfrac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}$. Поэтому центру круга C_b соответствует точка $\bar{z} = -\dfrac{\overline{\varphi'(b)}}{\overline{\varphi(b)}}$. Подставляя $\bar{z}$

в формулу для l, находим, что центр C_b находится в точке

$$-\frac{W_b\{\theta, \overline{\varphi}\}}{W_b\{\varphi, \overline{\varphi}\}}.$$

Далее

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}\right\}=\frac{1}{2}i\left\{\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}-\frac{\overline{\varphi'(b)}}{\overline{\varphi(b)}}\right\}=-\frac{1}{2}i\frac{W_b\{\varphi, \overline{\varphi}\}}{|\varphi(b)|^2}.$$

В силу (6.1.2) последнее выражение имеет тот же знак, что и v, ибо

$$W_0\{\varphi, \overline{\varphi}\}=0.$$

Поэтому *если $v>0$, то верхней z-полуплоскости соответствует внешность круга C_b.*

Так как точка $-\dfrac{\theta'(b)}{\varphi'(b)}$ лежит на C_b (при $z=0$), то, обозначая через r_b радиус C_b, получим

$$r_b=\left|\frac{\theta'(b)}{\varphi'(b)}-\frac{W_b\{\theta, \overline{\varphi}\}}{W_b\{\varphi, \overline{\varphi}\}}\right|=\left|\frac{W_b\{\theta, \varphi\}}{W_b\{\varphi, \overline{\varphi}\}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2v\int\limits_0^b|\varphi(x)|^2\,dx}. \tag{6.1.5}$$

Далее, при $v>0$ l находится внутри C_b, если $\operatorname{Im}(z)<0$, т. е. если $i(z-\overline{z})>0$.

Разрешая (6.1.4) относительно z, мы получим

$$i\left\{-\frac{l\varphi'(b)+\theta'(b)}{l\varphi(b)+\theta(b)}+\frac{\overline{l}\overline{\varphi}'(b)+\overline{\theta}'(b)}{\overline{l}\overline{\varphi}(b)+\overline{\theta}(b)}\right\}>0.$$

Сделав в последнем неравенстве приведение к общему знаменателю, мы получим

$$i\{|l|^2W_b\{\varphi, \overline{\varphi}\}+lW_b\{\varphi, \overline{\theta}\}+\overline{l}W_b\{\theta, \overline{\varphi}\}+W_b\{\theta, \overline{\theta}\}\}=$$
$$=iW_b\{\theta+l\varphi, \overline{\theta}+\overline{l}\overline{\varphi}\}>0.$$

Поэтому из (6.1.2) следует

$$2v\int\limits_0^b|\theta+l\varphi|^2\,dx<iW_0\{\theta+l\varphi, \overline{\theta}+\overline{l}\overline{\varphi}\}.$$

Так как $W_0\{\varphi, \overline{\theta}\}=1$, $W_0\{\varphi, \overline{\varphi}\}=0$, $W_0\{\theta, \overline{\theta}\}=0$, $W_0\{\theta, \overline{\varphi}\}=1$, то

$$W_0\{\theta+l\varphi, \overline{\theta}+\overline{l}\overline{\varphi}\}=l-\overline{l}=2i\,\mathrm{Im}\,(l).$$

Таким образом, l находится внутри C_b, если $v>0$ и

$$\int\limits_0^b |\theta+l\varphi|^2\,dx < -\frac{\mathrm{Im}\,(l)}{v}. \qquad (6.1.6)$$

Тот же результат получается в случае $v<0$ (пользуемся неравенством $\mathrm{Im}\,(z)>0$). В обоих случаях знак $\mathrm{Im}\,(l)$ противоположен знаку v.

Таким образом, если l находится внутри C_b и $0<b'<b$, то

$$\int\limits_0^{b'} |\theta+l\varphi|^2\,dx < \int\limits_0^{b} |\theta+l\varphi|^2\,dx < -\frac{\mathrm{Im}\,(l)}{v}.$$

Поэтому l лежит также и внутри $C_{b'}$. Следовательно, если $b'<b$, то $C_{b'}$ содержит C_b. Отсюда следует, что при $b\to\infty$ круги C_b сходятся либо к предельному кругу, либо к предельной точке.

Пусть $m=m(\lambda)$ — предельная точка или любая точка предельной окружности.

Тогда

$$\int\limits_0^{\infty} |\theta+l\varphi|^2\,dx \leqslant -\frac{\mathrm{Im}\,(m)}{v}. \qquad (6.1.7)$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 6.1.1. *Для всех недействительных значений λ существует решение уравнения* (6.1.1)

$$\psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\,\varphi(x,\lambda)$$

с интегрируемым квадратом на интервале $(0,\infty)$.

В случае предельного круга r_b стремится к конечному пределу при $b\to\infty$. Поэтому из (6.1.5) следует, что $\varphi(x,\lambda)\subset \subset L_2(0,\infty)$, т. е. в этом случае каждое решение уравнения (6.1.1) принадлежит $L_2(0,\infty)$.

2. Для данного β $l = l(\lambda)$ есть аналитическая функция от λ. Она даже мероморфна с полюсами на действительной оси. В самом деле, полюсы $l(\lambda)$ суть нули функции

$$\varphi(b, \lambda)\cos\beta + \varphi'(b, \lambda)\sin\beta.$$

Эти нули суть собственные значения уравнения (6.1.1) в конечном интервале $(0, b)$ и, следовательно, простые.

Из рассуждений предыдущего пункта следует, что для данного λ область l-плоскости, покрытая кругом C_b, убывает с возрастанием b. Поэтому семейство аналитических функций $l(\lambda) = l(\lambda, b, \beta)$ равномерно ограничено в каждой ограниченной области, лежащей целиком в верхней (нижней) λ-полуплоскости. В силу известной теоремы теории функций комплексного переменного это семейство нормально (т. е. из каждой бесконечной последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность) в каждой из упомянутых областей.

Если при всех недействительных λ имеет место случай точки*), то, как легко видеть, семейство функций $l(\lambda)$ имеет единственный предел $m(\lambda)$, который является аналитической функцией в силу известной теоремы Вейерштрасса.

В случае предельного круга семейство $l(\lambda)$ имеет неединственный предел. Из нормальности семейства следует, что можно выделить неограниченно возрастающую последовательность чисел b_k и последовательность чисел β_k так, что

$$\lim_{k\to\infty} l(\lambda, b_k, \beta_k) = m(\lambda)$$

существует в каждой из λ-полуплоскостей и является аналитической функцией. Числа $m(\lambda)$, очевидно, лежат на предельных окружностях.

3. Пусть $l(\lambda, b)$ имеет прежнее значение. Положим

$$\psi_b(x, \lambda) = \theta(x) + l\varphi(x).$$

---

*) Можно показать, что если хотя бы для одного недействительного λ имеет место случай точки, то то же самое справедливо для всех других недействительных λ.

Лемма 6.1.1. *Для каждого недействительного* λ

$$\psi_b(x, \lambda) \to \psi(x, \lambda);$$

$$\int_0^b |\psi_b(x, \lambda)|^2 dx \to \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx \qquad (b \to \infty).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\psi_b(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + [l(\lambda) - m(\lambda)]\, \varphi(x, \lambda),$$

где $\psi(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$.

В случае предельного круга *) $l(\lambda) \to m(\lambda)$, поэтому $\psi_b(x, \lambda) \to \psi(x, \lambda)$ и в силу того, что $\varphi(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty)$,

$$\int_0^b |\psi_b(x, \lambda)|^2 dx \to \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx.$$

В случае предельной точки

$$|l(\lambda) - m(\lambda) \leqslant 2r_b = \frac{1}{v \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx}.$$

Так как $r_b \to 0$, то $\psi_b(x, \lambda) \to \psi(x, \lambda)$. Далее

$$\int_0^b |\{l(\lambda) - m(\lambda)\}\, \varphi(x, \lambda)|^2 dx =$$

$$= |l(\lambda) - m(\lambda)|^2 \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \leqslant \frac{1}{v^2 \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx}.$$

Поэтому и в этом случае

$$\int_0^b |\psi_b(x, \lambda)|^2 dx \to \int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx.$$

---

*) В случае предельного круга b стремится к бесконечности по некоторой последовательности. β принимает значения также из некоторой последовательности. Это замечание следует иметь в виду в предельных переходах следующего параграфа и в следующей главе.

§ 2. Интегральное представление резольвенты

Пусть $f(x) \subset L_2(0, \infty)$. Положим ($\lambda$ — недействительное число)

$$\Phi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) f(y)\, dy + \varphi(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y)\, dy,$$

где $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ имеют то же значение, что и в предыдущем параграфе. Если $f(y)$ — непрерывная функция, то

$$\Phi'(x, \lambda) = \psi'(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) f(y)\, dy + \varphi'(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y)\, dy,$$

$$\Phi''(x, \lambda) = \psi''(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) f(y)\, dy + \varphi''(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) f(y)\, dy + \{\psi'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda)\psi(x, \lambda)\} f(x) = \{q(x) - \lambda\}\Phi(x, \lambda) + f(x),$$

ибо

$$\psi'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda)\psi(x, \lambda) = W_x\{\varphi, \psi\} = W_0\{\varphi, \psi\} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha + m(\lambda)\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha - m(\lambda)\cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$\Phi''(x, \lambda) - \{q(x) - \lambda\}\Phi(x, \lambda) = f(x). \qquad (6.2.1)$$

Кроме этого,

$$\Phi(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) f(y)\, dy,$$

$$\Phi'(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) f(y)\, dy,$$

так что $\Phi(x, \lambda)$ удовлетворяет начальному условию

$$\Phi(0, \lambda) \cos\alpha + \Phi'(0, \lambda) \sin\alpha = 0.$$

Пусть $\lambda_{n,\, b}$ и $\varphi_{n,\, b}(x)$ — собственные значения и собственные функции граничной задачи, определяемой уравнением (6.1.1) и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\, \varphi(0, \lambda) + \sin\alpha\, \varphi'(0, \lambda) = 0, \\ \cos\beta\, \varphi(b, \lambda) + \sin\beta\, \varphi(b, \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.2)$$

Пусть $l(\lambda)$ и $\psi_b(x, \lambda)$ имеют то же значение, что и в предыдущем параграфе. Положим

$$G_b(x, y; z) = \begin{cases} \psi_b(x, z)\, \varphi(y, z), & y \leqslant x, \\ \varphi(x, z)\, \psi_b(y, z), & y > x, \end{cases}$$

$$R_{z,\, b} f = \int_0^b G_b(x, y; z) f(y)\, dy.$$

Полагая

$$\alpha_n^2 = \int_0^b \varphi_{n,\, b}^2(x)\, dx,$$

получим (см. гл. I, § 3)

$$R_{z,b} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,b}(x) \int_0^b f(y)\, \varphi_{n,b}(y)\, dy}{\alpha_n^2 (z - \lambda_{n,b})} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) \int_0^b f(y)\, \varphi(y, \lambda)\, dy}{z - \lambda}\, d\rho_b(x),$$

где $\rho_b(\lambda)$ имеет то же самое значение, что и во второй главе.

Лемма 6.2.1. *Для каждого недействительного z и фиксированного x*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda) < K. \tag{6.2.3}$$

Доказательство. Так как *)

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_0^b G_b(x, y; z) \varphi_{n,b}(y)\, dy = \frac{\varphi_{n,b}(x)}{\alpha_n (z - \lambda_{n,b})}, \tag{6.2.4}$$

то в силу формулы Парсеваля

$$\int_0^b |G_b(x, y; z)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,b}^2(x)}{\alpha_n^2 |z - \lambda_{n,b}|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(x, \lambda)}{|z - \lambda|^2} d\rho_b(\lambda),$$

и настоящая лемма следует непосредственно из леммы 6.1.1.

Следствие I. *Пусть $\rho(\lambda)$ имеет то же значение, что и в первой главе. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(x, \lambda)}{|z - \lambda|^2} \, d\rho(\lambda) < K \tag{6.2.5}$$

с той же константой K, что и в неравенстве (6.2.3).

Доказательство. Пусть $a > 0$ — произвольно. Из неравенства (6.2.3) следует

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi^2(x, \lambda)}{|z - \lambda|^2} d\rho_b(\lambda) < K.$$

Полагая сначала $b \to \infty$, а затем $a \to \infty$, получим (6.2.5).

Следствие II. *Если* $\sin \alpha \neq 0$, *то, полагая в* (6.2.5) $x = 0$, *получим*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{|z - \lambda|^2} < \infty.$$

---

*) В формуле (1.3.10) следует положить $f(y) = \varphi_{n,b}(y)$.

Отсюда следует, что при любом $a > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} < \infty, \quad \int\limits_{a}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} < \infty. \tag{6.2.6}$$

Если $\sin\alpha = 0$, то, дифференцируя (6.2.4), получим

$$\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^b \frac{\partial}{\partial x} G_b(x, y; z)\,\varphi_{n,b}(y)\,dy = \frac{\varphi'_{n,b}(x)}{\alpha_n(z-\lambda_{n,b})}. \tag{6.2.4'}$$

Применяя равенство Парсеваля, получим

$$\int\limits_0^b \left|\frac{\partial}{\partial x} G_b(x, y; z)\right|^2 dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'^2(x,\lambda)}{|z-\lambda|^2}\,d\rho_b(\lambda).$$

Отсюда уже нетрудно получить (6.2.6) и в этом случае.

Лемма 6.2.2. *Пусть* $f(x) \subset L_2(0, \infty)$ и

$$R_z f = \int\limits_0^{\infty} G(x, y; z)\,f(y)\,dy.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\infty} |R_z f|^2\,dx \leqslant \frac{1}{v^2}\int\limits_0^{\infty} f^2(y)\,dy.$$

Доказательство. При каждом $b > 0$

$$\int\limits_0^b |R_{z,b} f|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\int\limits_0^b f(y)\,\varphi_{n,b}(y)\,dy\right\}^2}{\alpha_n^2\,|z-\lambda_{n,b}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\int\limits_0^b f(y)\,\varphi_{n,b}(y)\,dy\right\}^2 = \frac{1}{v^2}\int\limits_0^b f^2(y)\,dy.$$

Пусть a — фиксированное положительное число. Если $a < b$, то

$$\int\limits_0^a |R_{z,b} f|^2\,dx \leqslant \int\limits_0^b |R_{z,b} f|^2\,dx \leqslant \frac{1}{v^2}\int\limits_0^b f^2(y)\,dy.$$

Полагая $b \to \infty$, мы получим

$$\int_0^a |R_z f|^2 dx \leqslant \frac{1}{v^2} \int_0^\infty f^2(y)\, dy,$$

и так как a произвольно, то лемма доказана.

Теорема 6.2.1. (Интегральное представление резольвенты.) *Для каждой функции $f(y) \subset L_2(0, \infty)$ и каждого недействительного z*

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) E(\lambda)}{z - \lambda}\, d\rho(\lambda), \tag{6.2.7}$$

где

$$E(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $f(x) = f_n(x)$ 1) удовлетворяет граничному условию (5.1.1), 2) обращается в нуль вне конечного интервала $(0, n)$ и 3) имеет непрерывную вторую производную.

Пусть $b > n$ и ν — произвольное положительное число. Имеем

$$R_{z,b} f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) E_n(\lambda)}{z - \lambda}\, d\rho_b(\lambda) =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{-\nu} + \int_{-\nu}^{\nu} + \int_{\nu}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) E_n(\lambda)}{z - \lambda}\, d\rho_b(\lambda) \right\} = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$E_n(\lambda) = \int_0^n f_n(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Так же как и при доказательстве теоремы 2.1.1, можно показать, что при $\nu \to \infty$ I_1 и I_3 стремятся к нулю равномерно по b. Поэтому можно воспользоваться обобщенной теоремой Хелли, и мы получим

$$R_z f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,\lambda)E_n(\lambda)}{z-\lambda}\,d\rho(\lambda). \qquad (6.2.8)$$

Если $f(y)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом, то, как известно, можно указать последовательность функций $f_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$), удовлетворяющих предыдущим условиям и при $n\to\infty$ сходящихся к $f(x)$ в среднем квадратичном. В силу равенства Парсеваля последовательность преобразований Фурье функций $f_n(x)$ — $E_n(\lambda)$ сходится также в среднем квадратичном (по функции $\rho(\lambda)$) к преобразованию Фурье функции $f(x)$, которое мы обозначим через $E(\lambda)$. Поэтому в силу следствия 1 из леммы 6.2.1 и леммы 6.2.2 можно в (6.2.8) перейти к пределу ($n\to\infty$), и мы получим (6.2.7).

Замечание I. С помощью аналогичных рассуждений можно получить формулу

$$\int_0^{\infty} R_z(f)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda)G(\lambda)}{z-\lambda}\,d\rho(\lambda), \qquad (6.2.9)$$

где $f(x)$, $g(x)\subset L_2(0, \infty)$,

$$F(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx;$$

$$G(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n g(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

Замечание II. В случае предельной точки оператор L имеет единственную резольвенту. Поэтому из формулы обращения Стильтьеса (см. дополнение II) следует единственность функции $\rho(\lambda)$. В частности, если $q(x)\subset L(0, \infty)$, то из асимптотических формул (3.1.12) и (3.1.12′) следует, что мы имеем случай предельной точки. Вследствие единственности $\rho(\lambda)$ отрицательные собственные значения оператора L не зависят от β. В § 1 гл. 3 в этом пункте у нас был пробел.

3. Теорема 6.2.2. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $f(x) \subset L_2(0, \infty)$,
2) $\{f'' - q(x) f\} \subset L_2(0, \infty)$,
3) $\cos f(0) + \sin \alpha f'(0) = 0$,
4) $\lim\limits_{x \to \infty} W\{f(x), E_\lambda(x)\} = 0, \quad E_\lambda(x) = \int\limits_{+0}^{\lambda} \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$

$(\lambda \neq 0)$.

Положим

$$g(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(y) E_\lambda(y)\, dy.$$

Тогда

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda)\, dg(\lambda), \tag{6.2.10}$$

причем последний интеграл сходится абсолютно.

Доказательство. Если $f(y)$ обращается в нуль вне конечного интервала, то, меняя порядок интегрирования, мы получим

$$g(\lambda) = \int\limits_{+0}^{\lambda} E(\lambda)\, d\rho(\lambda); \quad E(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Эта формула для $g(\lambda)$ остается в силе и в общем случае ввиду сходимости преобразований Фурье в среднем. Поэтому формулу (6.2.7) можно записать в виде

$$R_z f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda)\, dg(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{6.2.11}$$

Последний интеграл, как нам известно, сходится абсолютно. Пусть $h(\lambda)$ определяется по Lf так же, как $g(\lambda)$ по f.

В силу условия 4) и тождества Грина

$$h(\lambda) = \int\limits_0^\infty Lf E_\lambda(x)\, dx = -\int\limits_0^\infty f(x) \left\{ \int\limits_{+0}^{\lambda} \mu \varphi(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right\} dx.$$

Если $f(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала, то

$$h(\lambda) = -\int_{+0}^{\lambda} \mu E(\mu)\, d\rho(\mu) = -\int_{+0}^{\lambda} \mu\, dg(\mu). \quad (6.2.12)$$

Эта формула остается в силе и в общем случае, ибо

$$\int_{+0}^{\lambda} \mu\varphi(x, \mu)\, d\rho(\mu) \subset L_2(0, \infty).$$

В самом деле,

$$\int_0^b dx \left\{ \int_{+0}^{\lambda} \mu\varphi(x, \mu)\, d\rho_b(\mu) \right\}^2 = \int_{+0}^{\lambda} \mu^2\, d\rho_b(\mu).$$

Отсюда $(a < b)$

$$\int_0^a dx \left\{ \int_{+0}^{\lambda} \mu\varphi(x, \mu)\, d\rho_b(\mu) \right\}^2 \leqslant \int_{+0}^{\lambda} \mu^2\, d\rho_b(\mu).$$

Полагая вначале $b \to \infty$, а затем $a \to \infty$, получим наше утверждение. Дифференцируя (6.2.12), получим

$$dh(\lambda) = -\lambda\, dg(\lambda); \quad dg(\lambda) = -\frac{dh(\lambda)}{\lambda}. \quad (6.2.13)$$

Так как в силу условия 2) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda)\, dh(\lambda)}{z - \lambda}$$

сходится абсолютно, то в силу (6.2.13) абсолютно сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda)\, dg(\lambda).$$

Поэтому наша теорема следует непосредственно из теоремы 2.1.2.

§ 3. Ортогональность

1. Результаты настоящего параграфа формально не зависят от теории линейных операторов в пространстве Гильберта, но по существу тесно связаны с этой теорией.

Для читателей, незнакомых с теорией линейных операторов в пространстве Гильберта, мы сделаем несколько вводных замечаний. Подробное изложение можно найти в пятом томе «Курса высшей математики» В. И. Смирнова или в статье А. И. Плеснера, цитированной в предисловии.

a) Пространством Гильберта (пространством H) называется линейное пространство (т. е. совокупность элементов, которые можно складывать и умножать на комплексные числа), в котором каждым двум элементам (векторам) ставится в соответствие некоторое число (x, y), называемое скалярным произведением векторов x и y и удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$,

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ (α, β — комплексные числа),

3) $(x, x) \geqslant 0$,

4) $(x, x) = 0$ только в том случае, когда $x = 0$.

С помощью скалярного произведения пространство Гильберта можно превратить в метрическое пространство. Именно, следует определить расстояние между элементами x и y по формуле

$$d(x, y) = \sqrt{(x-y, x-y)}.$$

Предполагается также полнота пространства H относительно этого расстояния.

b) В общей теории линейных (неограниченных) операторов принимается, что оператор задан не на всем пространстве H, а на некотором линейном многообразии.

Оператор A, определенный на некотором линейном многообразии $\Omega_A \subset H$, называется линейным, если для $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $f_1, f_2 \subset \Omega_A$, а λ_1, λ_2 — комплексные числа,

$$Af = \lambda_1 A f_1 + \lambda_2 A f_2.$$

Оператор B называется сопряженным с оператором A, если для любых элементов $f \subset \Omega_A$ и $g \subset \Omega_B$

$$(Af, g) = (f, Bg).$$

В частности, оператор A называется симметрическим (эрмитовым), если для каждой пары $f, g \subset \Omega_A$

$$(Af, g) = (f, Ag),$$

Оператор A' называется продолжением оператора A, если $\Omega_{A'} \supset \Omega_A$ и для всех $f \subset \Omega_A$

$$A'f = Af.$$

Предполагая многообразие Ω_A всюду плотным в H, можно показать, что среди всех сопряженных с A операторов существует один наибольший A^*, который является расширением любого сопряженного с A оператора.

Линейный оператор A называется самосопряженным (гипермаксимальным), если $A^* = A$.

Можно показать (см. цитированную книгу В. И. Смирнова), что дифференциальное выражение

$$y'' - q(x)\,y \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty), \tag{6.3.0}$$

где $q(x)$ — действительная, непрерывная в каждом конечном интервале функция, совместно с граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{6.3.0'}$$

в случае предельной точки порождает в гильбертовом пространстве функций с интегрируемым квадратом на полупрямой и со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

единственный самосопряженный оператор. В случае же предельного круга существует бесчисленное множество самосопряженных операторов, связанных с дифференциальным выражением (6.3.1) и граничным условием (6.3.2).

Во втором случае каждый самосопряженный оператор определяется дополнительным «граничным условием на бесконечности».

c) Если каждому действительному числу λ ставится в соответствие линейный оператор B_λ, то говорят, что B_λ есть операторная функция. Операторную функцию E_λ называют разложением единицы, если она обладает следующими свойствами:

1) Для любого действительного λ оператор E_λ ограниченный и самосопряженный.

2) E_λ — непрерывная слева функция по отношению к параметру λ, т. е. для любых $f, g \subset H$

$$\lim_{\lambda \to \lambda - 0} (E_\lambda f, g) = (E_\lambda f, g).$$

3) Полнота: $E_\infty = E$ (единичный оператор). $E_{-\infty} = 0$.

4) Ортогональность: $E_\lambda E_\mu = E_\nu$, где $\nu = \min(\mu, \lambda)$.

Если $\Delta = (\mu, \mu + \Delta)$ $(\Delta > 0)$ есть интервал с концами, указанными в скобках, то, полагая $E_\Delta = E_{\mu+\Delta} - E_\mu$, мы получим из условия ортогональности

$$E_\lambda E_\Delta = E_\lambda (E_{\mu+\Delta} - E_\mu) = E_{\min(\lambda, \mu+\Delta)} - E_{\min(\lambda, \mu)}.$$

Последний оператор, как легко видеть, равен $E(-\infty, \lambda) \cdot \Delta$. Полагая $\Delta' = (\lambda, \lambda + \Delta')$ $(\Delta' > 0)$, мы получим

$$E_{\Delta'} E_\Delta = (E_{\lambda+\Delta'} - E_\lambda) E_\Delta = E_{\lambda+\Delta'} E_\Delta - E_\lambda E_\Delta =$$
$$= E_{(\lambda+\Delta')\cdot\Delta} - E_{\lambda\cdot\Delta} = E_{\Delta\cdot\Delta'}.$$

Условие ортогональности часто формулируют в этой последней форме. В теории самосопряженных операторов является основной следующая спектральная теорема:

Пусть A — самосопряженный оператор. Существует единственное для данного оператора A разложение единицы E_λ так, что для элемента f из области определения оператора A и любого элемента g из H имеет место спектральное разложение

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f, g),$$

причем интеграл справа сходится абсолютно.

В настоящем параграфе мы покажем, что полученная ранее формула Парсеваля порождает разложение единицы и, следовательно, тесно связана со спектральной теоремой.

2. Лемма 6.3.1. *Пусть $\Delta = (\lambda, \lambda + \Delta)$ — конечный интервал, концы которого суть точки непрерывности функции $\rho(\lambda)$. При каждом фиксированном x*

$$E_\Delta(x, y) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \varphi(x, \lambda)\, \varphi(y, \lambda)\, d\rho(\lambda) \subset L_2(0, \infty).$$

Доказательство. Принимая обозначения второго параграфа настоящей главы, получим

$$\int\limits_0^b \left\{ \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_n^2} \varphi_{n,b}(x)\, \varphi_{n,b}(y) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_n^2} \varphi_{n,b}(y)\, \varphi_{n,b}(z) \right\} dy =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_n^2} \varphi_{n,b}(x)\, \varphi_{n,b}(z).$$

Если $a < b$ и $x = z$, то из предыдущего равенства следует неравенство

$$\int\limits_0^a \left\{ \int\limits_\Delta \varphi(x, \lambda)\, \varphi(y, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \right\}^2 dy \leqslant \int\limits_\Delta \varphi^2(x, \lambda)\, d\rho_b(\lambda).$$

При фиксированном a и $b \to \infty$ мы получим, переходя к пределу под знаком интеграла,

$$\int\limits_0^a \left\{ \int\limits_\Delta \varphi(x, \lambda)\, \varphi(y, \lambda)\, d\rho(\lambda) \right\}^2 \leqslant \int\limits_\Delta \varphi^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda),$$

и так как a произвольно, то лемма доказана.

Лемма 6.3.2. *Пусть* $f(y) \subset L_2(0, \infty)$ *и*

$$E_\Delta f = \int\limits_0^\infty E_\Delta(x, y) f(y)\, dy.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \{E_\Delta f\}^2\, dx \leqslant \int\limits_0^\infty f^2(x)\, dx. \tag{6.3.1}$$

Доказательство. Пусть вначале $f(x) = f_n(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(0, n)$. Прибегая снова к обозначениям § 2 настоящей главы, мы получим, предполагая, что $b > n$,

$$\int_0^b dx \left\{ \int_0^n f_n(y)\, dy \sum_{\lambda < \lambda_{k,b} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_k^2} \varphi_{k,b}(x)\, \varphi_{k,b}(y) \right\}^2 =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_{k,b} \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_k^2} \left\{ \int_0^n f_n(y)\, \varphi_{k,b}(y)\, dy \right\}^2 \leqslant \int_0^n f_n^2(x)\, dx.$$

Если $a < b$, то и подавно

$$\int_0^a dx \left\{ \int_0^n f_n(y)\, dy \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, \varphi(y, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \right\}^2 \leqslant \int_0^n f_n^2(x)\, dx.$$

Полагая $b \to \infty$ при фиксированном a, мы получим

$$\int_0^a dx \left\{ \int_0^n E_\Delta(x, y)\, f_n(y)\, dy \right\}^2 \leqslant \int_0^n f_n^2(x)\, dx.$$

Полагая $a \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty \{E_\Delta f_n\}^2\, dx \leqslant \int_0^n f_n^2(x)\, dx. \tag{6.3.2}$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0 & x > n. \end{cases}$$

При фиксированном $a > 0$ из (6.3.2) следует

$$\int_0^a dx \left\{ \int_0^n E_\Delta(x, y)\, f(y)\, dy \right\}^2 \leqslant \int_0^n f^2(x)\, dx\,,$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим

$$\int_0^a dx \left\{ \int_0^\infty E_\Delta(x, y) f(y)\, dy \right\}^2 \leqslant \int_0^\infty f^2(x)\, dx.$$

Полагая $a \to \infty$, получим (6.3.1).

Лемма 6.3.3. *Пусть* $f(x) \subset L_2(0, \infty)$ *и*

$$F(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

Тогда

$$E_\Delta f = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, F(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{6.3.3}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = f_n(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала. Тогда

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f_n(y)\, \varphi(y, \lambda)\, dy.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\varphi(x, \lambda)$ и интегрируя, получим

$$\int_0^n f_n(y)\, E_\Delta(x, y)\, dy = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, F_n(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{6.3.4}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $f_n(y) = f(y)$ для $0 \leqslant y \leqslant n$, $f_n(y) = 0$ для $y > n$. Если $n \to \infty$, то $F_n(\lambda)$ сходятся в среднем к $F(\lambda)$. Поэтому в равенстве (6.3.4) справа можно перейти к пределу. Переход к пределу слева также возможен на основании леммы 6.3.2, и мы получим (6.3.3).

Лемма 6.3.4. *Пусть*

$$E_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$$

и $f(x) \subset L_2(0, \infty)$. *Тогда для почти всех* λ (*по мере, определяемой на прямой линии функцией* $\rho(\lambda)$)

$$F(\lambda) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\rho(\Delta)} \int_0^\infty f(x)\, E_\Delta(x)\, dx. \tag{6.3.5}$$

Доказательство. Если $\sin\alpha \neq 0$, то интегрируемость квадрата функции $E_\Delta(x)$ следует из леммы 6.3.1 (полагаем $y=0$).

Пусть $\sin\alpha = 0$. Из ортогональности функций $\varphi_{n,b}(x)$ следует тождество

$$\int_0^b \left\{ \int_\Delta \varphi_x'(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, d\rho_b(\lambda) \right\}^2 dy = \int_\Delta \varphi_x'^2(x, \lambda)\, d\rho_b(\lambda).$$

Отсюда с помощью точно таких же рассуждений, как и при доказательстве леммы 6.3.1, следует, что при каждом фиксированном x

$$\frac{\partial E_\Delta(x, y)}{\partial x} \subset L_2(0, \infty).$$

В частности, при $x=0$ следует, что

$$E_\Delta(y) \subset L_2(0, \infty).$$

Полагая в формуле (6.3.3)

$$x = 0\ ^{*}),$$

мы получим

$$\int_0^\infty f(x) E_\Delta(x)\, dx = \int_\Delta F(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Деля последнее равенство на $\rho(\Delta) = \rho(\lambda+\Delta) - \rho(\lambda)$, мы получим

$$\frac{1}{\rho(\Delta)} \int_0^\infty f(x) E_\Delta(x)\, dx = \frac{1}{\rho(\Delta)} \int_\Delta F(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Наконец, полагая $\Delta \to 0$ и пользуясь известной теоремой Лебега о дифференцировании определенного интеграла, мы получим (6.3.5).

Теорема 6.3.1. *Пусть $f(y) \subset L_2(0, \infty)$ и $\Delta = (\lambda, \lambda+\Delta)$ — конечный интервал, концы которого суть точки непрерыв-*

---

*) Если $\sin\alpha = 0$, то формулу (6.3.3) следует предварительно продифференцировать по x, что возможно, так как

$$\frac{\partial E_\Delta(x, y)}{\partial x} \subset L_2(0, \infty).$$

ности функции $\rho(\lambda)$. *Для каждого недействительного* z

$$R_z E_\Delta f = \int_0^\infty G(x, y; z)\,dy \int_0^\infty E_\Delta(y, t) f(t)\,dt =$$

$$= \int_\Delta \frac{\varphi(x, \lambda) F(\lambda)}{z - \lambda}\,d\rho(\lambda), \tag{6.3.6}$$

где $F(\lambda)$ — *преобразование Фурье* $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим вначале тот случай, когда $f(x) = f_n(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(0, n)$. Прибегая снова к обозначениям § 2, мы получим

$$\int_0^b G_b(x, y; z)\,dy \left\{ \int_0^n f_n(t)\,dt \int_\Delta \varphi(y, \lambda)\varphi(t, \lambda)\,d\rho_b(\lambda) \right\} =$$

$$= \int_\Delta \frac{\varphi(x, \lambda) \int_0^n f_n(t)\,\varphi(t, \lambda)\,dt}{z - \lambda}\,d\rho_b(\lambda).$$

Сходимость к пределу правой части последнего равенства очевидна. Рассмотрим левую часть. Пусть $a > 0$ — фиксированное число. Имеем

$$\int_0^b G_b(x, y; z)\,dy \left\{ \int_0^n f_n(t)\,dt \int_\Delta \varphi(y, \lambda)\varphi(t, \lambda)\,d\rho_b(\lambda) \right\} =$$

$$= \int_0^a G_b(x, y; z)\,dy \left\{ \int_0^n f_n(t)\,dt \int_\Delta \varphi(y, \lambda)\varphi(t, \lambda)\,d\rho_b(\lambda) \right\} +$$

$$+ \int_a^b G_b(x, y; z)\,dy \left\{ \int_0^n f_n(t)\,dt \int_\Delta \varphi(y, \lambda)\varphi(t, \lambda)\,d\rho_b(\lambda) \right\}. \tag{6.3.7}$$

При $b \to \infty$ первое слагаемое справа, очевидно, стремится к

$$\int_0^a G(x, y; z)\,dy \left\{ \int_0^n f_n(t)\,dt \int_\Delta \varphi(y, \lambda)\varphi(t, \lambda)\,d\rho(\lambda) \right\},$$

Покажем, что второе слагаемое стремится к нулю при $a \to \infty$, $b > a$. Для этого воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\left| \int_a^b G_b(x, y; z)\, dy \left\{ \int_0^n f(t)\, dt \sum_{\lambda < \lambda_{k,b} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{1}{\alpha_k^2} \varphi_{k,b}(y)\, \varphi_{k,b}(t) \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b | G_b(x, y; z) |^2 dy \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^b dy \left[\sum_{\lambda < \lambda_{k,b} \leqslant \lambda + \Delta} \frac{1}{\alpha_k} \varphi_{k,b}(y) \frac{1}{\alpha_k} \int_0^n f(t)\, \varphi_{k,b}(t)\, dt \right]^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \int_a^b | G_b(x, y; z) |^2 dy \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{\lambda < \lambda_{k,b} \leqslant \lambda + \Delta} \left[\frac{1}{\alpha_k} \int_0^n f(t)\, \varphi_{k,b}(t)\, dt \right]^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b | G_b(x, y; z) |^2 dy \right\}^{1/2} \left(\int_0^n f^2(t)\, dt \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 6.1.1 при достаточно большом a и произвольном $b > a$

$$\int_a^b | G_b(x, y; z) |^2 dy$$

будет меньше любого наперед заданного положительного числа.

Поэтому в (6.3.7) можно перейти к пределу ($a \to \infty$), и мы получим (6.3.6).

Рассмотрим теперь общий случай. Если $f_n(y) = f(y)$ для $0 \leqslant y \leqslant n$ и равно 0 для $y > n$, то по доказанному

$$R_z E_\Delta f_n = \int_\Delta \frac{\varphi(x, \lambda)\, F_n(\lambda)}{z - \lambda}\, d\rho(\lambda), \tag{6.3.8}$$

где

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(y)\, \varphi(y, \lambda)\, dy.$$

При $n \to \infty$ $F_n(\lambda)$ сходятся в среднем к $F(\lambda)$.

Поэтому переход к пределу справа в формуле (6.3.8) очевиден. Возможность предельного перехода слева следует из лемм 6.3.2 и 6.2.2.

Замечание. Пусть $g(x) \subset L_2(0, \infty)$. Помножим обе части равенства (6.3.6) на $g(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до n. Мы получим

$$\int_0^n R_z E_\Delta f \cdot g(x)\,dx = \int_\Delta \frac{G_n(\lambda) F(\lambda)}{z-\lambda} d\rho(\lambda),$$

где положено

$$G_n(\lambda) = \int_0^n g(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим

$$\int_0^\infty R_z E_\Delta f \cdot g(x)\,dx = \int_\Delta \frac{G(\lambda) F(\lambda)}{z-\lambda} d\rho(\lambda), \qquad (6.3.9)$$

где

$$G(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_0^n g(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

3. Пусть $f(x)$, $g(x) \subset L_2(0, \infty)$. Умножая обе части равенства (6.3.3) на $g(x)$ и интегрируя по x в пределах от 0 до n, мы получим

$$\int_0^n g(x)\,dx \int_0^\infty E_\Delta(x, y) f(y)\,dy = \int_\Delta G_n(\lambda) F(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Полагая $n \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty g(x)\,dx \int_0^\infty E_\Delta(x, y) f(y)\,dy = (E_\Delta f, g) =$$

$$= \int_\Delta F(\lambda) G(\lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad (6.3.10)$$

Семейство операторов E_Δ обладает следующими свойствами:

1) Самосопряженность, т. е.

$$(E_\Delta f, g) = (f, E_\Delta g).$$

2) Монотонность, т. е. если $\Delta' \subset \Delta$, то

$$(E_{\Delta'} f, f) \leqslant (E_\Delta f, f).$$

3) Полнота, т. е.

$$(E_{(-\infty, \infty)} f, g) = (f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx.$$

Свойство 1) следует из формулы (6.3.10) и симметричности функции $E_\Delta(x, y)$. Свойство 2) также следует непосредственно из формулы (6.3.10). Свойство 3) следует из той же формулы (6.3.10) и равенства Парсеваля.

Итак, для того чтобы доказать, что E_Δ есть разложение единицы, следует только установить ортогональность, ибо остальные свойства разложения единицы налицо.

Положим $E_\lambda = E_{(-\infty, \lambda)}$. Формулу (6.3.9) можно записать в виде

$$\int_0^\infty R_z E_\Delta f \cdot g(x)\, dx = \int_\Delta \frac{d_\lambda (E_\lambda f, g)}{z - \lambda}.$$

С другой стороны, в силу формулы (6.2.9)

$$\int_0^\infty R_z E_\Delta f \cdot g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda (E_\lambda E_\Delta f, g)}{z - \lambda}.$$

В силу теоремы единственности для преобразования Стильтьеса (см. дополнение II, теорема 2) из последних формул следует

$$F_\lambda E_\Delta = E_{(-\infty, \lambda)} E_\Delta = E_{(-\infty, \lambda) \cdot \Delta} = E_\Delta,$$

а это и есть ортогональность.

4. Лемма 6.3.5. *Пусть*

$$E_\Delta(x, y) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Тогда

$$\int_0^\infty E_\Delta(x, z) E_{\Delta'}(z, y)\, dz = \\ = \int_{\Delta \cdot \Delta'} \varphi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda)\, d\rho(\lambda) = E_{\Delta \cdot \Delta'}(x, y). \quad (6.3.11)$$

Доказательство. Следует непосредственно из ортогональности.

Лемма 6.3.6. *Пусть*

$$E_\Delta(x) = \int_\Delta \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$$

и $F_\Delta(\lambda)$ *есть преобразование Фурье функции*)* $E_\Delta(x)$. *Для почти всех* λ *(по мере, определяемой на прямой линии функцией* $\rho(\lambda)$*)* $F_\Delta(\lambda) = 1$ *для* $\lambda \subset \Delta$ *и равно* 0 для $\lambda \overline{\subset} \Delta$.

Доказательство. Если $\sin\alpha = 0$, то, полагая в формуле (6.3.11) $x = y = 0$, мы получим

$$\int_0^\infty E_\Delta(z) E_{\Delta'}(z)\, dz = \int_{\Delta\Delta'} d\rho(\lambda). \tag{6.3.12}$$

Если $\sin\alpha = 0$, то, положив в формуле (6.9.11) $x = y = 0$, мы получим слева и справа нуль. В этом случае следует вначале продифференцировать равенство (6.3.11) по x и по y, что возможно, ибо (см. доказательство леммы 6.3.4)

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\partial E_\Delta(x, z)}{\partial x}\right\}^2 dz < \infty,$$

и затем положить $x = y = 0$. Мы снова получим (6.3.12).

Деля (6.3.12) на $\rho(\Delta')$, полагая $\Delta' \to 0$ и пользуясь леммой (6.3.4), мы получим утверждение настоящей леммы.

Лемма 6.3.7. *Пусть* $G(x, y; z)$ *имеет то же значение, что и в* § 2. *При каждых фиксированных* x и z *(*z *— недействительное число) преобразование Фурье функции* $G(x, y; z)$ *есть*

$$\frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda}.$$

Доказательство. Полагая в формуле (6.2.7) $f(y) = E_\Delta(y)$, мы получим в силу предыдущей леммы

$$\int_0^\infty G(x, y; z) E_\Delta(y)\, dy = \int_\Delta \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} d\rho(\lambda). \tag{6.3.13}$$

*) Существование $F_\Delta(\lambda)$ следует из доказательства леммы (6.3.4).

Деля на $\rho(\Delta)$, получим

$$\frac{1}{\rho(\Delta)}\int_0^\infty G(x, y; z)\, E_\Delta(y)\, dy = \frac{1}{\rho(\Delta)}\int_\Delta \frac{\varphi(x, \lambda)}{z-\lambda}\, d\rho(\lambda).$$

Полагая $\Delta \to 0$ и пользуясь леммой 6.3.4, получим утверждение настоящей леммы.

§ 4. Взаимная формула Парсеваля

Мы установили во второй главе, что для каждой функции $f(x) \subset L_2(0, \infty)$ можно определить функцию $F(\lambda)$ (преобразование Фурье), причем

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda).$$

В настоящем параграфе докажем следующую обратную теорему:

Теорема 6.4.1. *Пусть $\rho(\lambda)$ имеет то же самое значение, что и в теореме 2.1.1. Какова бы ни была функция $F(\lambda)$ с интегрируемым квадратом (относительно $\rho(\lambda)$), существует функция*

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m\cdot}} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$$

и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^\infty f^2(x)\, dx.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $F_N(x)$ есть непрерывная функция, равная нулю вне конечного интервала $(-N, N)$. Положим

$$g_N(x) = \int_{-N}^{N} F_N(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Покажем, что

$$\int_0^\infty g_N^2(x)\,dx < \infty. \qquad (6.4.1)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$—произвольное деление интервала $(-N, N)$ и $\xi_i \subset (\lambda_{i-1}, \lambda_i)$. Положим

$$g_N^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_N(\xi_i) \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} \varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Если $\max(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \to 0$, то равномерно в каждом конечном интервале

$$g_N^{(n)}(x) \to g_N(x) \qquad (n \to \infty).$$

В силу леммы 6.3.5 и равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty g_N^{(n)2}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} F_N^2(\xi_i) \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} d\rho(\lambda) \to \int_{-N}^{N} F_N^2(\lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad (6.4.2)$$

Пусть $a > 0$—фиксированное число. Из (6.4.2) следует существование такого фиксированного, положительного числа K, что

$$\int_0^a g_N^{(n)2}(x)\,dx < K. \qquad (6.4.3)$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим

$$\int_0^a g_N^2(x)\,dx < K,$$

и так как a произвольно, то отсюда следует (6.4.1).

Теперь покажем, что *преобразование Фурье функции* $g_N(x)$ *почти всюду (по мере, определяемой* $\rho(\lambda)$) *совпадает с* $F_N(\lambda)$. В силу формулы (6.3.12)

$$\int_0^\infty g_N^{(n)}(x)\,E_\Delta(x)\,dx = \sum_i F_N(\xi_i) \int_{\Delta\Delta_i} d\rho(\lambda). \qquad (6.4.4)$$

Пусть $n \to \infty$. Из неравенства (6.4.3), а также из того, что $E_\Delta(x) \subset L_2(0, \infty)$, легко следует, что в равенстве (6.4.4) можно перейти к пределу, и мы получим

$$\int_0^\infty g_N(x) E_\Delta(x)\,dx = \int_\Delta F_N(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Деля на $\rho(\Delta)$ и полагая $\Delta \to 0$, мы получим, пользуясь леммой 6.3.4, что для почти всех λ преобразование Фурье функции $g_N(x)$ совпадает с $F_N(\lambda)$. Поэтому в силу равенства Парсеваля (теорема 2.1.1)

$$\int_0^\infty g_N^2(x)\,dx = \int_{-N}^N F_N^2(\lambda)\,d\rho(\lambda). \tag{6.4.5}$$

Пусть теперь $F(\lambda)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом (относительно $\rho(\lambda)$). Можно подобрать последовательность непрерывных функций $F_N(\lambda)$, равных нулю вне конечных интервалов $(-N, N)$ и сходящихся к $F(\lambda)$ в среднем. Пусть

$$g_N(x) = \int_{-N}^N F_N(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Из (6.4.5) следует $(N' > N)$

$$\int_0^\infty \{g_{N'}(x) - g_N(x)\}^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty \{F_{N'}(\lambda) - F_N(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda).$$

Поэтому функции $g_N(x)$ сходятся в среднем квадратичном к некоторой функции $f(x)$ и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Остается показать, что при $N \to \infty$ функции

$$f_N(x) = \int_{-N}^N F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

сходятся в среднем к $f(x)$.

Пусть $H(\lambda)$—другая функция с интегрируемым квадратом (относительно $\rho(\lambda)$) и $h(x)$ строится по $H(\lambda)$ так же, как $f(x)$ по $F(\lambda)$. Очевидно, что

$$\int_0^\infty \{f(x)-h(x)\}^2\,dx=\int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda)-H(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda).$$

Полагая $H(\lambda)=F(\lambda)$ при $-N\leqslant\lambda\leqslant N$ и равно 0 при $|\lambda|>N$, мы получим

$$\int_0^\infty \{f(x)-f_N(x)\}^2\,dx=\int_{-\infty}^{-N} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)+\int_N^\infty F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 5. Формула для $\rho(\lambda)$

С помощью интегрального представления резольвенты можно получить полезную формулу для функции $\rho(\lambda)$. Эту формулу можно положить в основу при определении спектра оператора *) L. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 6.5.1. *Пусть $\psi(x,\lambda)$ имеет то же значение, что и в первом параграфе настоящей главы. Для любых фиксированных недействительных λ и λ'*

$$\lim_{x\to\infty} W\{\psi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda')\}=0.$$

Доказательство. Функция $\theta(x,\lambda)+l\varphi(x,\lambda)$ удовлетворяет второму граничному условию (6.2.2). Поэтому

$$W_b\{\theta(x,\lambda)+l(\lambda)\varphi(x,\lambda),\ \theta(x,\lambda')+l(\lambda')\varphi(x,\lambda')\}=0.$$

Отсюда следует

$$W_b\{\psi(x,\lambda)+[l(\lambda)-m(\lambda)]\varphi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda')+ \\ +[l(\lambda')-m(\lambda')]\varphi(x,\lambda')\}=0,$$

т. е.

$$W_b\{\psi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda')\}+[l(\lambda)-m(\lambda)]\,W_b\{\varphi(x,\lambda),\ \varphi(x,\lambda')\}+ \\ +[l(\lambda')-m(\lambda')]\,W_b\{\psi(x,\lambda),\ \varphi(x,\lambda')\}+ \\ +[l(\lambda)-m(\lambda)]\,[l(\lambda')-m(\lambda')]\,W_b\{\varphi(x,\lambda),\ \varphi(x,\lambda')\}=0. \quad (6.5.1)$$

*) См. цитированную книгу Титчмарша.

При $b \to \infty$

$$W_b\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} =$$

$$= (\lambda' - \lambda) \int_0^b \varphi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') \, dx + W_0\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} =$$

$$= O\left\{ \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \right\} + O(1).$$

В случае предельной точки

$$|l(\lambda) - m(\lambda)| \leqslant 2r_b = \left\{ v \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 \, dx \right\}^{-1},$$

так что

$$\lim_{b \to \infty} [l(\lambda) - m(\lambda)] \, W_b\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} = 0.$$

Это последнее равенство остается также в силе в случае предельного круга, если $l(\lambda) \to m(\lambda)$, ибо в этом случае интеграл $\int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 \, dx$ остается ограниченным. Аналогично оцениваются остальные слагаемые в (6.5.1), и лемма доказана.

Лемма 6.5.2. *При тех же обозначениях, что и в предыдущей лемме,*

$$\int_0^\infty \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') \, dx = \frac{m(\lambda) - m(\lambda')}{\lambda' - \lambda}. \qquad (6.5.2)$$

Доказательство. В силу формулы Грина

$$(\lambda' - \lambda) \int_0^b \psi(x, \lambda) \psi(x, \lambda') \, dx =$$

$$= W_0\{\psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\} - W_b\{\psi(x, \lambda), \psi(x, \lambda')\}.$$

Первый член справа равен

$$[\cos\alpha + m(\lambda) \sin\alpha] [\sin\alpha - m(\lambda') \cos\alpha] -$$

$$- [\cos\alpha + m(\lambda') \sin\alpha] [\sin\alpha - m(\lambda) \cos\alpha] = m(\lambda) - m(\lambda').$$

В силу предыдущей леммы второй член стремится к нулю при $b \to \infty$. Поэтому равенство (6.5.2) доказано.

В частности, при $\lambda' = \bar{\lambda}$ ($\lambda = u + iv$) из (6.5.2) следует

$$\int_0^\infty |\psi(x, \lambda)|^2 dx = -\frac{\operatorname{Im}\{m(\lambda)\}}{v}, \tag{6.5.3}$$

так что в (6.1.7) на самом деле имеет место знак равенства.

Лемма 6.5.3. *При фиксированных u_1 и u_2 и $\delta \to 0$*

$$\int_{u_1}^{u_2} -\operatorname{Im}\{m(u + i\delta)\} du = O(1). \tag{6.5.4}$$

Доказательство. Пусть $\sin\alpha \neq 0$. В силу леммы 6.3.7 (при $x = 0$) и равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty |\psi(y, z)|^2 dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2 + v^2} \quad (z = u + iv). \tag{6.5.5}$$

Если $\sin\alpha = 0$, то следует предварительно доказать, что преобразованием Фурье функции $\frac{\partial G(x, y; z)}{\partial x}$ является функция $\frac{\varphi'_x(x, \lambda)}{z - \lambda}$. Это обстоятельство легко установить, дифференцируя обе части равенства (6.3.13) по x $\left(\text{что возможно, ибо, при фиксированных } x \text{ и } z,\ \frac{\partial}{\partial x} G(x, y; z) \subset L_2(0, \infty)\right)$. Полагая затем $x = 0$, мы снова получим формулу (6.5.5).

Из (6.5.3) и (6.5.5) следует

$$-\operatorname{Im}\{m(u + i\delta)\} = \delta \int_{-\infty}^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2 + \delta^2}.$$

Интегрируя по u, получим

$$\int_{u_1}^{u_2} -\operatorname{Im}\{m(u + i\delta)\} du = \delta \int_{u_1}^{u_2} du \int_{-\infty}^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2 + \delta^2}.$$

Пусть (a, b) — конечный интервал, причем $a < u_1$, $b > u_2$. В силу (6.2.6)

$$\delta \int_{u_1}^{u_2} du \int_{-\infty}^{a} \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2+\delta^2} = O(1),$$

$$\delta \int_{u_1}^{u_2} du \int_{b}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2+\delta^2} = O(1).$$

Далее имеем

$$\int_{u_1}^{u_2} du\, \delta \int_{a}^{b} \frac{d\rho(\lambda)}{(u-\lambda)^2+\delta^2} = \int_{a}^{b} d\rho(\lambda) \int_{u_1}^{u_2} \frac{\delta\, du}{(u-\lambda)^2+\delta^2} =$$

$$= \int_{a}^{b} d\rho(\lambda) \int_{\frac{u_1-\lambda}{\delta}}^{\frac{u_2-\lambda}{\delta}} \frac{dv}{1+v^2} = O(1),$$

и лемма доказана.

Теорема 6.5.1. *Пусть концы интервала $\Delta = (\lambda, \lambda+\Delta)$ суть точки непрерывности функции $\rho(\lambda)$. Тогда*

$$\rho(\Delta) = \rho(\lambda+\Delta) - \rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta\to 0} \int_{\Delta} \{-\operatorname{Im}[m(u+i\delta)]\}\, du. \tag{6.5.6}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$, $g(x) \subset L_2(0, \infty)$ и обращаются в нуль вне конечного интервала. В силу формулы (6.2.9)

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} R_z f \cdot g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda)\, G(\lambda)}{z-\lambda}\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z-\lambda},$$

где

$$\sigma(\Delta) = \int_{\Delta} F(\lambda)\, G(\lambda)\, d\rho(\lambda);$$

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx,$$

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx.$$

По формуле обращения Стильтьеса

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Delta} \{-\operatorname{Im} \cdot \Phi(u + i\delta)\} \, du. \tag{6.5.7}$$

Далее имеем

$$\operatorname{Im} \Phi(u + i\delta) =$$

$$= \int_0^\infty g(x)\, dx \operatorname{Im} \left\{ \int_0^x [\theta(x, u + i\delta) + m(u + i\delta)\, \varphi(x, u + i\delta)] \times \right.$$

$$\times \varphi(y, u + i\delta) f(y)\, dy + \int_x^\infty \varphi(x, u + i\delta) \times$$

$$\left. \times [\theta(y, u + i\delta) + m(u + i\delta)\, \varphi(y, u + i\delta)] f(y)\, dy \right\}.$$

Функции $\varphi(x, u)$, $\psi(x, u)$, $f(x)$, $g(x)$ действительны. Поэтому из предыдущего равенства соотношения (6.3.7) и леммы 6.5.3 следует

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Delta} \{-\operatorname{Im} [m(u + i\delta)]\} F(u)\, G(u)\, du. \tag{6.5.8}$$

Выбирая $f(x)$ и $g(x)$ надлежащим образом, можно добиться того, чтобы $F(u)$ и $G(u)$ отличались сколь угодно мало от единицы в фиксированном интервале Δ (см. доказательство леммы (2.1.1). Поэтому из (6.5.8) и леммы 6.5.3 следует формула (6.5.6).

Г Л А В А VII

ИНТЕРВАЛ $(-\infty, \infty)$

§ 1. Резольвента

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \{q(x) - \lambda\} y = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = -1,$$

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0.$$

Очевидно, что $W\{\varphi, \theta\} = 1$. Пусть функции $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ имеют то же значение, что и во втором параграфе второй главы, и пусть концы интервала $\Delta = (\lambda, \lambda + \Delta)$ суть точки непрерывности этих функций. Положим

$$E_\Delta(x, y) = \int_\lambda^{\lambda+\Delta} \{\varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\, d\xi(\lambda) + \varphi(x, \lambda)\theta(y, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \varphi(y, \lambda)\theta(x, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \theta(x, \lambda)\theta(y, \lambda)\, d\zeta(\lambda)\}.$$

Лемма 7.1.1. *При каждом фиксированном x $E_\Delta(x, y) \subset L_2(-\infty, \infty)$.*

Доказательство. В обозначениях § 2 гл. 2 имеем в силу ортогональности

$$\int_a^b \Big[\sum_{\lambda < \lambda_n \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_n^2} \{\beta_n \varphi(x, \lambda_n) + \gamma_n \theta(x, \lambda_n)\} \{\beta_n \varphi(y, \lambda_n) + \gamma_n \theta(y, \lambda_n)\} \Big]^2 dy = \sum_{\lambda < \lambda_n \leqslant \lambda+\Delta} \frac{1}{\alpha_n^2} \{\beta_n \varphi(x, \lambda_n) + \gamma_n \theta(x, \lambda_n)\}^2$$

и дальше, как в лемме 6.3.1.

Лемма 7.1.2. *Пусть* $f(x) \subset L_2(-\infty, \infty)$. *Положим*

$$E_\Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} E_\Delta(x, y) f(y)\, dy.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{E_\Delta f\}^2 dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y)\, dy.$$

Доказательство. Проводится так же, как и доказательство леммы 6.3.2.

Как мы установили в первом параграфе предыдущей главы, существуют регулярные в верхней полуплоскости функции $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$, для которых

$$\psi_1(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_1(\lambda)\varphi(x, \lambda) \subset L_2(-\infty, 0),$$

$$\psi_2(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_2(\lambda)\varphi(x, \lambda) \subset L_2(0, \infty).$$

Легко видеть, что

$$W\{\psi_1, \psi_2\} = m_1(\lambda) - m_2(\lambda).$$

Положим

$$G(x, y; z) = \frac{\psi_2(x, z)\,\psi_1(y, z)}{m_1(z) - m_2(z)} \quad (y \leqslant x), \quad = \frac{\psi_1(x, z)\,\psi_2(y, z)}{m_1(z) - m_2(z)} \quad (y > x)$$

и

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; z) f(y)\, dy.$$

Так же как и в § 2 гл. 5, можно показать, что в случае непрерывности $f(y)$ $R_z f$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \{q(x) - z\}\, y = f(x).$$

Пусть (a, b) — конечный интервал. α и β — фиксированные числа.

Пусть $\psi_{1,a}(x, \lambda)$ и $\psi_{2,b}(x, \lambda)$ определены так же, как $\psi_b(x, \lambda)$ в случае полупрямой $(0, \infty)$. Обозначим через $\lambda_{n, a, b}$ и $\varphi_{n, a, b}(x)$ собственные значения и собственные функции граничной задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\{q(x)-\lambda\}y=0,$$
$$y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0,$$
$$y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0.$$

Лемма 7.1.3. *Пусть* $f(y)\subset L_2(-\infty,\infty)$, $z=u+iv$. *Имеет место оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R_zf|^2\,dx\leqslant\frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(y)\,dy.$$

Доказательство. Такое же, как и в лемме 6.2.2.

Лемма 7.1.4. *Для* $a>0$

$$\left.\begin{array}{lll}\displaystyle\int_{-\infty}^{-a}\frac{d\xi(\lambda)}{\lambda^2}<\infty, & \displaystyle\int_{a}^{\infty}\frac{d\xi(\lambda)}{a^2}<\infty, & \displaystyle\int_{-\infty}^{-a}\frac{d\zeta(\lambda)}{\lambda^2}<\infty,\\ \displaystyle\int_{a}^{\infty}\frac{d\zeta(\lambda)}{\lambda^2}<\infty, & \displaystyle\int_{-\infty}^{-a}\frac{|d\eta(\lambda)|}{\lambda^2}<\infty, & \displaystyle\int_{a}^{\infty}\frac{|d\eta(\lambda)|}{\lambda^2}<\infty.\end{array}\right\}\qquad(7.1.1)$$

Доказательство. Пусть $G_{a,b}(x,\ y;\ z)$ — функция Грина для оператора $\{L-zE\}$ в интервале (a,b). Тогда

$$\int_a^b G_{a,b}(x,y;z)\,\varphi_{n,a,b}(y)\,dy=\frac{\varphi_{n,a,b}(x)}{z-\lambda_{n,a,b}}\quad(z=u+iv).\qquad(7.1.2)$$

Дифференцируя равенство (7.1.2) по x, получим

$$\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}G_{a,b}(x,y;z)\,\varphi_{n,a,b}(y)\,dy=\frac{\varphi'_{n,a,b}(x)}{z-\lambda_{n,a,b}}.\qquad(7.1.3)$$

Применяя равенство Парсеваля, мы получим в обозначениях § 2 гл. 2 (μ, ν фиксированы)

$$\int_{\mu}^{\nu}\frac{\varphi^2(x,\lambda)\,d\xi_{a,b}(\lambda)+2\varphi(x,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\,d\eta_{a,b}(\lambda)+\theta^2(x,\lambda)\,d\zeta_{a,b}(\lambda)}{(u-\lambda)^2+v^2}\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b|G_{a,b}(x,y;z)|^2\,dy.$$

Полагая в этом неравенстве вначале $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, а затем $\mu \to -\infty$, $\nu \to \infty$, мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(x, \lambda)\, d\xi(\lambda) + 2\varphi(x, \lambda)\,\theta(x, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \theta^2(x, \lambda)\, d\zeta(\lambda)}{(u-\lambda)^2 + v^2} < \infty.$$

Полагая в последнем неравенстве $x = 0$, мы получим первые два неравенства (7.1.1). Точно так же, применяя равенство Парсеваля к функции $G'_{a, b, x}(x, y; z)$, мы получим в силу (7.1.3) вторую пару неравенств (7.1.1). Наконец, третья пара неравенств (7.1.1) следует из оценки

$$|d\eta(\lambda)| \leqslant \sqrt{d\xi(\lambda)} \cdot \sqrt{d\zeta(\lambda)}$$

и неравенства Коши-Буняковского.

Теорема 7.1.1. (Интегральное представление резольвенты.) *Пусть* $f(x) \subset L_2(-\infty, \infty)$. *Для любого недействительного* z

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda f}{z-\lambda}, \tag{7.1.4}$$

где положено

$$E_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} E_\lambda(x, y)\, f(y)\, dy,$$

$$E_\lambda(x, y) = \int_{+0}^{\lambda} \{\varphi(x, \lambda)\,\varphi(y, \lambda)\, d\xi(\lambda) + \varphi(x, \lambda)\,\theta(y, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \\ + \varphi(y, \lambda)\,\theta(x, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \theta(x, \lambda)\,\theta(y, \lambda)\, d\zeta(\lambda)\}.$$

В формуле (7.1.4) *интеграл справа сходится абсолютно.*

Доказательство. Если $f(y) = f_n(y)$ обращается в нуль вне конечного интервала и имеет непрерывную вторую производную, то формула (7.1.4) выводится буквально так же, как формула (6.2.7).

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $f(y)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом в интервале $(-\infty, \infty)$ и пусть функции $f_n(y)$ при $n \to \infty$ сходятся в среднем квадратичном к $f(y)$, а так же удовлетворяют перечисленным выше условиям. По доказанному

$$R_z f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\varphi(x,\lambda) F_n(\lambda)\, d\xi(\lambda) + \varphi(x,\lambda) G_n(\lambda)\, d\eta(\lambda)}{z-\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta(x,\lambda) F_n(\lambda)\, d\eta(\lambda) + \theta(x,\lambda) G_n(\lambda)\, d\zeta(\lambda)}{z-\lambda} \right\}, \qquad (7.1.5)$$

где

$$F_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)\, \varphi(y,\lambda)\, dy; \quad G_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)\, \theta(y,\lambda)\, dy.$$

Нам следует показать, что в последнем равенстве возможен предельный переход ($n \to \infty$). В силу леммы 7.1.3 при $n \to \infty$ $R_z f_n \to R_z f$. Остается рассмотреть предел справа.

Рассмотрим гильбертово пространство пар функций. Элементом гильбертова пространства является упорядоченная пара комплексных функций

$$\tilde{f}(\lambda) = \{f_1(\lambda),\ f_2(\lambda)\}.$$

Скалярное произведение определим по формуле

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \{f_1(\lambda)\, \overline{g_1}(\lambda)\, d\xi(\lambda) + [f_1(\lambda)\, \overline{g_2}(\lambda) +$$

$$+ f_2(\lambda)\, \overline{g_1}(\lambda)]\, d\eta(\lambda) + f_2(\lambda)\, \overline{g_2}(\lambda)\, d\zeta(\lambda)\}.$$

Из определения функций $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ легко следует неотрицательность скалярного произведения

$$(\tilde{f}, \tilde{f}) \geqslant 0.$$

Отсюда обычным приемом получается неравенство Коши-Буняковского

$$|(\tilde{f}, \tilde{g})| \leqslant (\tilde{f}, \tilde{f})^{1/2} (\tilde{g}, \tilde{g})^{1/2}. \qquad (7.1.6)$$

Пусть A — произвольное положительное число. Положим

$$R_z f_n = \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{\infty} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} \right).$$

Из неравенства (7.1.6) следует оценка

$$\left| \int_{A}^{\infty} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{A}^{\infty} \frac{\varphi^2(x,\lambda)\, d\xi(\lambda) + 2\varphi(x,\lambda)\,\theta(x,\lambda)\, d\eta(\lambda) + \theta^2(x,\lambda)\, d\zeta(\lambda)}{|z-\lambda|^2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_{A}^{\infty} F_n^2\, d\xi(\lambda) + 2F_n(\lambda)\, G_n(\lambda)\, d\eta(\lambda) + G_n^2(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 7.1.4 и равенства Парсеваля последнее выражение при $A \to \infty$ стремится к нулю равномерно по n.

Аналогичное утверждение имеет место для интеграла в пределах $(-\infty, -A)$. Остается показать, что при фиксированном A и $n \to \infty$

$$\int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} \to \int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f}{z-\lambda}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} = \frac{E_A f_n}{z-A} - \frac{E_{-A} f_n}{z+A} - \int_{-A}^{A} \frac{E_\lambda f_n}{(z-\lambda)^2}\, d\lambda.$$

Так как при фиксированном x $E_\lambda(x, y) \subset L_2(-\infty, \infty)$, то в последнем выражении можно перейти к пределу, и мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f_n}{z-\lambda} = \frac{E_A f}{z-A} - \frac{E_{-A} f}{z+A} - \int_{-A}^{A} \frac{E_\lambda f}{(z-\lambda)^2}\, d\lambda. \quad (7.1.7)$$

Покажем теперь, что $E_\lambda f$ как функция от λ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале. Пусть для определенности $\lambda > 0$ и допустим вначале, что $f(y) = f_n(y)$ обращается в нуль вне конечного интервала. $E_\lambda f_n$ есть предел при $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$ сумм

$$\sum_{0 < \lambda_{k,a,b} \leqslant \lambda} \varphi_{k,a,b}(x) \frac{1}{\alpha_k^2} \int_a^b f_n(y) \varphi_{k,a,b}(y)\, dy.$$

В силу равенства (7.1.2)

$$\frac{1}{\alpha_k} \varphi_{k,a,b}(x) = (z - \lambda_{k,a,b}) \int_a^b G_{a,b}(x, y; z) \frac{1}{\alpha_k} \varphi_{k,a,b}(y)\, dy.$$

Поэтому из неравенства Коши-Буняковского следует

$$\sum_{0 < \lambda_{k,a,b} \leqslant \lambda} \left| \frac{1}{\alpha_k^2} \int_a^b f_n(y) \varphi_{k,a,b}(y) \varphi_{k,a,b}(x)\, dy \right| =$$

$$= \sum_{0 < \lambda_{k,a,b} \leqslant \lambda} \left| \int_a^b f_n(y) \frac{1}{\alpha_k} \varphi_{k,a,b}(y)\, dy \right| |z - \lambda_{k,a,b}| \times$$

$$\times \left| \int_a^b G_{a,b}(x, y; z) \frac{1}{\alpha_k} \varphi_{k,a,b}(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant \mu \leqslant \lambda} |z - \mu| \left(\int_a^b f_n^2(y)\, dy \right)^{1/2} \left(\int_a^b |G_{a,b}(x, y; z)|^2\, dy \right)^{1/2}.$$

Последнее выражение, очевидно, ограниченно равномерно по a, b, n. Таким образом, $E_\lambda f$ есть предел функций, вариации которых равномерно ограничены. Поэтому предельная функция имеет также ограниченную вариацию.

Интегрируя правую часть (7.1.7) по частям в обратном порядке, мы получим

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f_n}{z - \lambda} = \int_{-A}^{A} \frac{dE_\lambda f}{z - \lambda},$$

и так как A произвольно, то (7.1.4) доказано.

Теорема 7.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f(x)$, $\{f''-q(x)f\}\subset L_2(-\infty, \infty)$,

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} W\{f(x), E_\lambda(x, y)\}=0$.

Тогда

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda f.$$

Доказательство. Проводится так же, как и доказательство теоремы 6.2.2, с использованием теоремы 7.1.1 вместо теоремы 6.2.1.

Теорема 7.1.3. *Пусть* $\Delta=(\lambda, \lambda+\Delta)$ — *конечный интервал. Для любой функции* $f(x)\subset L_2(-\infty, \infty)$

$$R_z E_\Delta f=\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta}\frac{dE_\lambda f}{z-\lambda}. \tag{7.1.8}$$

Доказательство. Получается с помощью предельного перехода, аналогичного примененному при доказательстве теоремы 6.3.1, с использованием ограниченности вариации функции $E_\lambda f$.

Следствие. *Семейство операторов* E_λ *обладает свойством ортогональности.* Доказывается это утверждение с помощью формул (7.1.4), (7.1.8) и формулы обращения Стильтьеса.

§ 2. Формулы для $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$

1. На полупрямой представление функции $\rho(\lambda)$ в виде предела функций

$$\rho_b(\lambda)\ (b\to\infty)$$

может быть, как мы видели во второй главе, во многих случаях использовано для определения спектра оператора L. Подобные вычисления на всей оси становятся крайне затруднительными. Вот почему особое значение приобретают формулы для $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$, аналогичные формуле (6.5.6).

Лемма 7.2.1. *При фиксированных u_1 и u_2 и $v \to 0$*

$$\int_{u_1}^{u_2} \left\{-\operatorname{Im} \frac{1}{m_1(u+iv)-m_2(u+iv)}\right\} du = O(1), \quad (7.2.1)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \left\{-\operatorname{Im} \frac{m_1(u+iv)\,m_2(u+iv)}{m_1(u+iv)-m_2(u+iv)}\right\} du = O(1), \quad (7.2.2)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \left\{-\operatorname{Im} \frac{m_1(u+iv)}{m_1(u+iv)-m_2(u+iv)}\right\} = O(1). \quad (7.2.3)$$

Доказательство. Из (7.1.2) и равенства Парсеваля следует

$$\int_a^b |G_{a,b}(x, y;\ z)|^2\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n,a,b}^2(x)}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2} \quad (z = v + iv).$$

Интегрируя по u, получим

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_a^b |G_{a,b}(x, y, z)|^2\, dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,a,b}^2(x) \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2}. \quad (7.2.4)$$

Покажем, что при фиксированных u_1 и u_2 равномерно по n, a, b

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2} = O\left\{\frac{1}{v}\,\frac{1}{\lambda_{n,a,b}^2+1}\right\}. \quad (7.2.5)$$

Пусть $-N \leqslant u_1 < u_2 \leqslant N$, где $N \geqslant 1$. Если $|\lambda_{n,a,b}| \geqslant 2N$, то $|u-\lambda_{n,a,b}| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_{n,a,b}|$. Поэтому $(v \leqslant 1)$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{v\, du}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2} \leqslant \int_{u_1}^{u_2} \frac{4\,du}{\lambda_{n,a,b}^2} \leqslant \frac{8N}{\lambda_{n,a,b}^2} \leqslant \frac{16N}{\lambda_{n,a,b}^2+1}. \quad (7.2.6)$$

Если $|\lambda_{n,a,b}| < 2N$, то

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{v\,du}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v\,du}{(u-\lambda_{n,a,b})^2+v^2} = \\ = \pi \leqslant \pi \frac{4N^2+1}{\lambda_{n,a,b}^2+1}. \qquad (7.2.7)$$

Из (7.2.6) и (7.2.7) следует (7.2.5). Из (7.2.4) и (7.2.5) следует

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_a^b |G_{a,b}(x, y; z)|^2\,dy = O\left(\frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n,a,b}^2(x)}{\lambda_{n,a,b}^2+1}\right) = \\ = O\left(\frac{1}{v}\int_a^b |G_{a,b}(x, y; i)|^2\,dy\right) = O\left(\frac{1}{v}\right) \qquad (v \to 0),$$

равномерно по a, b, x; u_1, u_2 фиксированы.

Полагая $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, получим

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_{-\infty}^{\infty} |G(x, y; z)|^2\,dy = O\left(\frac{1}{v}\right). \qquad (7.2.8)$$

При $x = 0$

$$G(0, y; z) = \begin{cases} \dfrac{\psi_1(y, z)}{m_1(z)-m_2(z)} & (y \leqslant 0); \\[2mm] \dfrac{\psi_2(y, z)}{m_1(z)-m_2(z)} & (y > 0). \end{cases}$$

В силу формулы (6.5.3)

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} |\psi_1(x, z)|^2\,dx &= \frac{\operatorname{Im}\{m_1\}}{v}; \\ \int_0^{\infty} |\psi_2(x, z)|^2\,dx &= -\frac{\operatorname{Im}\{m_2\}}{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.9)$$

Поэтому, полагая в (7.2.8) $x = 0$, мы получим

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{Im}\{m_1(z)-m_2(z)\}}{|m_1(z)-m_2(z)|^2}\,du = O(1),$$

откуда следует (7.2.1).

Рассуждая аналогично, мы получим с помощью (7.1.3)

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_{-\infty}^{\infty} |G'_x(x, y; z)|^2 dy = O\left(\frac{1}{v}\right).$$

Но

$$G'_x(0, y; z) = \begin{cases} \dfrac{-m_2(z)\,\psi_1(y, z)}{m_1(z) - m_2(z)} & (y < 0); \\[2mm] \dfrac{-m_1(z)\,\psi_2(y, z)}{m_1(z) - m_2(z)} & (y > 0). \end{cases}$$

Поэтому в силу (7.2.9)

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{|m_2(z)|^2 \operatorname{Im}\{m_1\} - |m_1(z)|^2 \operatorname{Im}\{m_2\}}{|m_1(z) - m_2(z)|^2}\, du = O(1),$$

откуда следует

$$\int_{u_1}^{u_2} \operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)\, m_2(z)}{m_1(z) - m_2(z)}\right\} du = O(1),$$

т. е. (7.2.2). Остается доказать (7.2.3). С этой целью проверим неравенство

$$\left[\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)}{m_1(z) - m_2(z)}\right\}\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{m_1(z) - m_2(z)}\right\} \operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)\, m_2(z)}{m_1(z) - m_2(z)}\right\}. \quad (7.2.10)$$

Положим $m_1(z) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $m_2(z) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. В силу формулы (7.2.9) $\operatorname{Im}\{m_1\} > 0$, следовательно, $\sin\varphi > 0$; $\operatorname{Im}\{m_2\} < 0$, следовательно, $\sin\psi < 0$ $(v > 0)$.

Умножая все знаменатели в (7.2.10) на сопряженные величины, мы придем к неравенству

$$[\operatorname{Im}\{m_1(z)\,\overline{m_2(z)}\}]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Im}\{\overline{m}_1(z) - \overline{m}_2(z)\} \cdot \operatorname{Im}\{|m_1(z)|^2 m_2(z) - |m_2(z)|^2 \overline{m_1(z)}\},$$

или в тригонометрической форме

$$r\rho \sin^2(\varphi - \psi) \leqslant (\rho\sin\psi - r\sin\varphi)(r\sin\psi - \rho\sin\varphi) =$$
$$= r\rho\sin^2\psi + r\rho\sin^2\varphi - \sin\varphi\sin\psi\,(r^2 + \rho^2).$$

Отсюда следует

$$r\rho\,[-2\sin^2\varphi\sin^2\psi-2\sin\varphi\cos\psi\sin\psi\cos\varphi]\leqslant$$
$$\leqslant-\sin\varphi\sin\psi\,(r^2+\rho^2).$$

Сокращая на положительную величину $-\sin\varphi\sin\psi$, мы получим

$$2r\rho\cos(\varphi-\psi)\leqslant r^2+\rho^2,$$

а это неравенство всегда справедливо.

Из неравенства (7.2.10) следует оценка

$$\int\limits_{u_1}^{u_2}\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)}{m_1(z)-m_2(z)}\right\}\right|du\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{u_1}^{u_2}\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{m_1(z)-m_2(z)}\right\}\right|^{1/2}\cdot\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)\cdot m_2(z)}{m_1(z)-m_2(z)}\right\}\right|^{1/2}du\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int\limits_{u_1}^{u_2}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{m_1(z)-m_2(z)}\right\}du\cdot\int\limits_{u_1}^{u_2}\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1(z)\,m_2(z)}{m_1(z)-m_2(z)}\right\}du\right]^{1/2},$$

что и доказывает (7.2.3).

2. Теорема 7.2.1. *Пусть* $\Delta=(\lambda,\ \lambda+\Delta)$ — *конечный интервал, концы которого суть точки непрерывности функций* $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ *и* $\zeta(\lambda)$.

Имеют место формулы

$$\xi(\Delta)=\xi(\lambda+\Delta)-\xi(\lambda)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\int\limits_{\Delta}\left\{-\operatorname{Im}\frac{1}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du,\qquad(7.2.11)$$

$$\eta(\Delta)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\int\limits_{\Delta}\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du,\qquad(7.2.12)$$

$$\zeta(\Delta)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\int\limits_{\Delta}\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)\,m_2(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du.\qquad(7.2.13)$$

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обращаются в нуль вне конечного интервала и имеют непрерывные вторые производные. Положим

$$F_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx,\quad G_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\theta(x,\lambda)\,dx;$$

$$F_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx,\quad G_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\theta(x,\lambda)\,dx.$$

Из теоремы 7.1.1 следует

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty} R_z f_1\cdot f_2(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(\lambda)F_2(\lambda)\,d\xi(\lambda)+\{F_1(\lambda)G_2(\lambda)+F_2(\lambda)G_1(\lambda)\}\,d\eta(\lambda)+G_1(\lambda)G_2(\lambda)\,d\zeta(\lambda)}{z-\lambda}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{z-\lambda},$$

где

$$\sigma(\Delta)=\int_{\Delta}\{F_1(\lambda)F_2(\lambda)\,d\xi(\lambda)+$$

$$+[F_1(\lambda)G_2(\lambda)+F_2(\lambda)G_1(\lambda)]\,d\eta(\lambda)+G_1(\lambda)G_2(\lambda)\,d\zeta(\lambda)\}.$$

В силу формулы обращения Стильтьеса

$$\sigma(\Delta)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta}\{-\operatorname{Im}\Phi(u+i\delta)\}\,du.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Im}\Phi(u+i\delta)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,dx\,\operatorname{Im}\Bigg\{\int_{-\infty}^{x}\frac{\theta(x,u+i\delta)+m_2(u+i\delta)\,\varphi(x,u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\times$$

$$\times[\theta(y,u+i\delta)+m_1(u+i\delta)\,\varphi(y,u+i\delta)]\,f_1(y)\,dy+$$

$$+\int_{x}^{\infty}\frac{\theta(x,u+i\delta)+m_1(u+i\delta)\,\varphi(x,u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\times$$

$$\times[\theta(y,u+i\delta)+m_2(u+i\delta)\,\varphi(y,u+i\delta)]\,f_1(y)\,dy\Bigg\}.$$

Принимая во внимание 1) действительность функций $\varphi(x, u)$, $\theta(x, u)$, 2) равенства

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{m_2}{m_1-m_2}\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1}{m_1-m_2}-1\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{m_1}{m_1-m_2}\right\},$$

3) лемму 7.2.1, мы получим

$$(\Delta)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta} F_1(u)F_2(u)\left\{-\operatorname{Im}\frac{1}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du+$$
$$+\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta}\{F_1(u)G_2(u)+F_2(u)G_1(u)\}\times$$
$$\times\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du+$$
$$+\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta} G_1(u)G_2(u)\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)\cdot m_2(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du. \tag{7.2.14}$$

Подбирая функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ так, чтобы $F_1(u)$ и $F_2(u)$ были близки к нулю, а $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — к единице (в интервале Δ), мы получим из формулы (7.2.14) (используя лемму 7.2.1) формулу (7.2.13).

Подбирая $f_1(x)$ и $f_2(x)$ так, чтобы $F_1(u)$ и $F_2(u)$ были близки к единице, а $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — к нулю *), мы получим формулу (7.2.11).

---

*) Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что $F_1(u)$ и $F_2(u)$ близки к нулю, а $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — к единице, то, интегрируя по частям, легко видеть, что функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x)\,\varphi(x, u)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_2'(x)\,\varphi(x, u)\,dx$$

будут близки к -1, а функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x)\,\theta(x, u)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_2'(x)\,\theta(x, u)\,dx$$

будут близки к нулю.

Формулу (7.2.14) перепишем в виде

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} \{F_1(u)\,F_2(u)\,d\xi(u)+[F_1(u)\,G_2(u)+F_2(u)\,G_1(u)]\,d\eta(u)+ \\ +G_1(u)\,G_2(u)\,d\zeta(u)\}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} F_1(u)\cdot F_2(u)\,d\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{u}\left\{-\operatorname{Im}\frac{1}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du+$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} G_1(u)\cdot G_2(u)\,d\,\frac{1}{\pi}\int_{+0}^{u}\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta}\{F_1(u)\,G_2(u)+F_2(u)\,G_1(u)\}\times \\ \times\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)\cdot m_2(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du.$$

Переходя в двух первых интегралах справа к пределу под знаком интеграла (что возможно в силу теоремы Хелли), мы получим, используя (7.2.11) и (7.2.13),

$$\int_{\Delta}[F_1(u)\,G_2(u)+F_2(u)\,G_1(u)]\,d\eta(u)= \\ =\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta}\{F_1(u)\,G_2(u)+F_2(u)\,G_1\,u)\}\times \\ \times\left\{-\operatorname{Im}\frac{m_1(u+i\delta)}{m_1(u+i\delta)-m_2(u+i\delta)}\right\}du. \quad (7.2.15)$$

Пусть $h>0$. Положим

$$f_1(x)=0,\ x<0,\ -\frac{1}{h},\ 0\leqslant x\leqslant h,\ 0,\ x>h,$$

$$f_2(x)=0,\ x<0,\quad \frac{1}{h^2},\ 0\leqslant x<h,\ 0,\ x>h.$$

Тогда

$$F_1(u)\,G_2(u) + F_2(u)\cdot G_1(u) =$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x, u)\,dx \cdot \frac{1}{h^2}\int_0^h \theta(x, u)\,dx -$$

$$- \frac{1}{h^2}\int_0^h \varphi(x, u)\,dx \cdot \frac{1}{h}\int_0^h \theta(x, u)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{h^2}\int_0^h \varphi(x, u)\,dx \cdot \frac{1}{h}\int_0^h \theta(x, u)\,dx.$$

В силу начального условия $\theta(0, u) = 1$, при достаточно малых h интеграл

$$\frac{1}{h}\int_0^h \theta(x, u)\,dx$$

будет сколь угодно мало отличаться от единицы. Далее в силу начального условия $\varphi(0, u) = 0$ мы получим

$$-\frac{2}{h^2}\int_0^h \varphi(x, u)\,dx = -\frac{2}{h^2}\int_0^h \{\varphi(x, u) - \varphi(0, u)\}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{h^2}\int_0^x x\varphi'_x(\xi_x, u)\,dx.$$

В силу начального условия $\varphi'_x(0, u) = -1$ последнее выражение при достаточно малых h будет сколь угодно мало отличаться от единицы.

Итак, при достаточно малых h выражение

$$F_1(u)\,G_2(u) + F_2(u)\,G_1(u)$$

мало отличается от единицы. Поэтому из (7.2.15) следует (7.2.12).

ДОПОЛНЕНИЕ I

ТЕОРЕМЫ ХЕЛЛИ

1. Пусть $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$, ..., $\sigma_n(\lambda)$, ... — бесконечная последовательность монотонных, неубывающих, ограниченных функций, заданных в конечном замкнутом интервале (a, b). Для определенности будем считать, что все функции нашей последовательности непрерывны слева:

$$\sigma_n(\lambda - 0) = \sigma_n(\lambda).$$

Первая теорема Хелли. *Если функции $\sigma_n(\lambda)$ равномерно ограничены, то можно выделить подпоследовательность $\sigma_{n_j}(\lambda)$, сходящуюся к монотонной функции $\sigma(\lambda)$. Сходимость имеет место в каждой точке непрерывности предельной функции $\sigma(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ — счетное, всюду плотное множество точек в интервале (a, b). С помощью диагонального процесса (См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V, стр. 49) можно выделить подпоследовательность $\sigma_{n_1}(\lambda), \sigma_{n_2}(\lambda), \ldots, \sigma_{n_j}(\lambda), \ldots$, сходящуюся во всех точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$ Положим

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{n_j}(\lambda_\nu) = \tau_\nu.$$

Если $\lambda_\mu < \lambda_\nu$, то $\tau_\mu \leqslant \tau_\nu$. С помощью чисел τ_ν мы определим предельную функцию $\sigma(\lambda)$. Положим

$$\sigma(\lambda + 0) = \inf_{\lambda_\nu > \lambda} \tau_\nu,$$

$$\sigma(\lambda - 0) = \sup_{\lambda_\nu < \lambda} \tau_\nu,$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}\{\sigma(\lambda + 0) + \sigma(\lambda - 0)\}.$$

$\sigma(\lambda)$ есть, очевидно, неубывающая функция.

Покажем теперь, что в каждой точке непрерывности функции $\sigma(\lambda)$ имеет место

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{n_j}(\lambda) = \sigma(\lambda). \tag{1}$$

Пусть λ — произвольная точка из интервала (a, b). Так как для $\lambda < \lambda_\nu$

$$\sigma_{n_j}(\lambda) \leqslant \sigma_{n_j}(\lambda_\nu),$$

то

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda) \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda_\nu) = \lim_{j\to\infty} \sigma_{n_j}(\lambda_\nu) = \tau_\nu.$$

Левая часть в этом неравенстве от ν не зависит, справа же стоит любое τ_ν, для которого соответствующее λ_ν больше λ. Поэтому

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda) \leqslant \inf_{\lambda_\nu > \lambda} \tau_\nu = \sigma(\lambda + 0).$$

Точно так же доказывается, что

$$\sigma(\lambda - 0) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda).$$

Таким образом,

$$\sigma(\lambda - 0) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda) \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}\, \sigma_{n_j}(\lambda) \leqslant \sigma(\lambda + 0).$$

В каждой точке непрерывности функции $\sigma(\lambda)$ $\sigma(\lambda - 0) = \sigma(\lambda + 0)$. Поэтому из предыдущих неравенств следует

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_n(\lambda) = \sigma(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Вторая теорема Хелли. *Пусть интервал $a \leqslant \lambda \leqslant b$ конечен и $f(\lambda)$ — непрерывная в этом интервале функция. Пусть последовательность монотонных функций $\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \ldots, \sigma_n(\lambda), \ldots$ сходится к $\sigma(\lambda)$, в каждой точке непрерывности предельной функции. Если сверх того*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(a) = \sigma(a), \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(b) = \sigma(b), \tag{2}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(\lambda)\, d\sigma_n(\lambda) = \int_a^b f(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что для $|\lambda' - \lambda''| < \delta$

$$|f(\lambda') - f(\lambda'')| < \varepsilon.$$

Пусть $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{i-1} < \lambda_i < \ldots < \lambda_{p-1} < \lambda_p = b$ есть разбиение интервала (a, b), для которого $(\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \delta$. Выбирая в интервале $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$ произвольную точку μ_i, получим

$$\left|\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda)-\sum_{i=1}^{p} f(\mu_i)[\sigma_n(\lambda_i)-\sigma_n(\lambda_{i-1})]\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{p}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda)-f(\mu_i)\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} d\sigma_n(\lambda)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}|f(\lambda)-f(\mu_i)|\,d\sigma_n(\lambda)<\varepsilon\int_a^b d\sigma_n(\lambda)=$$

$$=\varepsilon\{\sigma_n(b)-\sigma_n(a)\}<2M\varepsilon, \tag{4}$$

причем число M выбрано из условия $|\sigma_n(\lambda)|<M$. Точно так же доказывается неравенство

$$\left|\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)-\sum_{i=1}^{p} f(\mu_i)[\sigma(\lambda_i)-\sigma(\lambda_{i-1})]\right|<2M\varepsilon. \tag{5}$$

Выберем точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ среди точек непрерывности функции $\sigma(\lambda)$. Очевидно, что, зафиксировав эти точки, мы сможем подобрать n столь большим, что будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{p} f(\mu_i)[\sigma_n(\lambda_i)-\sigma_n(\lambda_{i-1})]-\sum_{i=1}^{p} f(\mu_i)[\sigma(\lambda_i)-\sigma(\lambda_{i-1})]\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

Из (4), (5) и (6) в силу произвольности ε следует (3).

2. Теорема Хелли допускает следующее обобщение на бесконечный промежуток: *Пусть последовательность монотонных функций* $\sigma_n(\lambda)$ $(-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty)$ *сходится к монотонной функции* $\sigma(\lambda)$ *в каждой точке непрерывности последней и пусть* $f(\lambda)$ *есть непрерывная функция на всей действительной оси. Предположим, что как бы мало ни было положительное число* ε, *можно указать столь большое положительное число* $A=A(\varepsilon)$, *что для всех* $a, b>A$ *и всех* n

$$\int_{-\infty}^{-a}|f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda)<\varepsilon,\qquad \int_b^{\infty}|f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda)<\varepsilon. \tag{7}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Доказательство. Вначале покажем, что функция $f(\lambda)$ абсолютно интегрируема по предельной функции $\sigma(\lambda)$. Действительно, если числа b и $c>A$, то по условию

$$\int_b^c |f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda)<\varepsilon.$$

Полагая при фиксированных b и c (b и c можно считать точками непрерывности $\sigma(\lambda)$) $n\to\infty$, мы получим

$$\int_b^c |f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda) < \varepsilon.$$

Полагая $c\to\infty$, получим

$$\int_b^\infty |f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda) < \varepsilon. \tag{8}$$

Точно так же доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda) < \varepsilon. \tag{9}$$

Из этих неравенств следует абсолютная интегрируемость $f(\lambda)$. В силу предыдущей теоремы при фиксированных $-a$ и b, являющихся точками непрерывности функции $\sigma(\lambda)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-a}^{b} f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda) = \int_{-a}^{b} f(\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{10}$$

Далее в силу неравенств (7)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{-a} |f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda) < \varepsilon, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{b}^{\infty} |f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda) < \varepsilon. \tag{11}$$

Из (8), (9), (10) и (11) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{-a} |f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-a} |f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-a}^{b} f(\lambda)\,d\sigma_n(\lambda) - \int_{-a}^{b} f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right| +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{b}^{\infty} |f(\lambda)|\,d\sigma_n(\lambda) + \int_{b}^{\infty} |f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda) < 4\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ II

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ СТИЛЬТЬЕСА

Пусть $\sigma(\lambda) = \sigma_1(\lambda) + i\sigma_2(\lambda)$ есть комплексная функция ограниченной вариации на всей действительной оси *).

Положим

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z-\lambda}.$$

Формула обращения Стильтьеса дает способ выразить $\sigma(\lambda)$ через $\varphi(z)$.

Положим $(z = \sigma + i\tau)$

$$\psi(\sigma, \tau) = \frac{\operatorname{sign}\tau}{\pi} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z})}{2i} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|\, d\sigma(\lambda)}{(\lambda-\sigma)^2 + \tau^2}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если точки a и b суть точки непрерывности функции $\sigma(\lambda)$, то*

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \lim_{\tau \to 0} \int_a^b -\psi(\sigma, \tau)\, d\sigma. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\sigma(-\infty) = 0$. Интегрируя (1) по частям, получим

$$-\psi(\sigma, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{|\tau|}{(\lambda-\sigma)^2 + \tau^2}\right) \sigma(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{|\tau|}{(\lambda-\sigma)^2 + \tau^2}\right) \sigma(\lambda)\, d\lambda.$$

*) То-есть действительные функции $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ имеют ограниченную вариацию.

Интегрируя последнее равенство по σ в пределах (a, b), мы получим

$$\int_a^b -\psi(\sigma, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{(\lambda - b)^2 + \tau^2} \sigma(\lambda)\, d\lambda -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{(\lambda - a)^2 + \tau^2} \sigma(\lambda)\, d\lambda = I(\tau, b) - I(\tau, a). \qquad (3)$$

Рассмотрим первый интеграл справа. Имеем

$$I(\tau, b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{(\lambda - b)^2 + \tau^2} \sigma(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \sigma^2} \sigma(\lambda + b)\, d\lambda.$$

Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \tau^2}\, d\lambda = 1,$$

то

$$I(\tau, b) - \sigma(b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \tau^2} \{\sigma(\lambda + b) - \sigma(b)\}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|\lambda| \leqslant \delta} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \tau^2} \{\sigma(\lambda + b) - \sigma(b)\}\, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{|\lambda| > \delta} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \tau^2} \{\sigma(\lambda + b) - \sigma(b)\}\, d\lambda = I_1 + I_2.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\sigma(\lambda + b) - \sigma(b)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |\lambda| \leqslant \delta.$$

Это возможно, так как, по предположению, точка b есть точка непрерывности функции $\sigma(\lambda)$. Выбрав, таким образом, δ, мы получим

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{\lambda^2 + \tau^2}\, d\lambda = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $M > 0$ выбрано из условия $|\sigma(\lambda)| < M$. Тогда

$$|I_2| \leqslant \frac{2M}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda\right\} =$$

$$= \frac{4M}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda = \frac{4M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{ar}\ \ \frac{\delta}{\tau}\right).$$

При фиксированном δ можно взять τ столь малым, что последнее выражение будет $< \frac{\varepsilon}{2}$. Так как ε произвольно, то мы доказали, что

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau, b) = \sigma(b).$$

Точно так же доказывается, что

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau, a) = \sigma(a).$$

Поэтому формула (2) следует из формулы (3).

Теорема 2. (Теорема единственности.) *Если $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ — две функции с ограниченной вариацией и при всех недействительных z*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda)}{z-\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\lambda)}{z-\lambda},$$

то $\sigma_1(\lambda) - \sigma_2(\lambda) = \mathrm{const}$.

Доказательство. По теореме 1 $\sigma_1(b) - \sigma_1(a)$ и $\sigma_2(b) - \sigma_2(a)$ должны совпадать для всех точек непрерывности a, b обеих функций $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$. Значит, эти функции могут отличаться лишь на постоянную величину.

Замечание. Если $\sigma(\lambda)$ — действительная функция, то $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$. Поэтому в этом случае

$$\psi(\sigma, \tau) = \frac{\operatorname{sign}\tau}{\pi}\,\frac{\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}}{2i} = \frac{\operatorname{sign}\tau}{\pi}\,\mathrm{Im}\{\varphi(z)\}.$$

Для $\tau > 0$ формула обращения Стильтьеса принимает вид

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\pi}\int_a^b - \mathrm{Im}\{\varphi(z)\}\,d\sigma.$$

Цена 5 ~~р. 30~~ к.

0-50